PROBLEMAS

de

Matemáticas Comunes

C.O.U - SELECTIVIDAD

325
problemas
resueltos

j.r. vizmanos - m. anzola

PROBLEMAS

de
Matemáticas Comunes

C.O.U - SELECTIVIDAD

j.r. vizmanos - m. anzola

ES PROPIEDAD DE LOS AUTORES

Queda hecho el depósito que marca la ley.

Dep. Legal : M - 30847 - 1976.

Pedidos a :

J.R. VIZMANOS

c/ **MELILLA** , 12

MADRID - 5

T*fno* : 266 18 60
279 70 54

IMPRESO EN VARICOP

C/ MADERA , 17

MADRID - 13

Prólogo

"Es **completamente utópico esperar aprender Matemáticas, ya sean elementales o superiores, sin resolver ejercicios.**

Nunca insistiremos suficiente sobre el hecho de que resolver un ejercicio no consiste solamente en convencerse, con ayuda de un boceto hecho a toda prisa, que se ha entendido **más** o menos lo que es la solución. Aunque este método pudiera ser admisible para los ejercicios de cálculo numérico, hace falta, por el contrario esforzarse en **redactar completamente** la solución de los ejercicios más teóricos, en los que hay que construir verdaderas demostraciones. De esta menera, y únicamente de esta manera, podrá el estudiante hacerse con un lenguaje claro y correcto y utilizar los términos técnicos en su sentido propio, lo que en Matemáticas, es él signo más cierto de comprensión de una materia".

(**GODEMENT**- ALGEBRA)

Los ejercicios propuestos en este libro abarcan :

a) Los propuestos en **el libro** de **MATEMATICAS COMUNES** de **J.R VIZMANOS** de **C.O.U.** (El número a que corresponden está señalado en cada enunciado).

b) Los propuestos en las dos últimas convocatorias (1975,1976) de las pruebas de **SELECTIVIDAD** (y algunos del antiguo PREUNIVERSITARIO)

c) Una selección de ejercicios bien elegidos de una dificultad similar a los apartados a) y b).

Este libro contiene **totalmente resueltos 325** problemas distribuidos en 8 capítulos. Los problemas de cada capítulo están clasificados en el mismo orden de las materias que se tratan en el libro de **TEORIA**.

La solución de los problemas se ha hecho de modo detallado con la pretensión de que los mismos alumnos de **LETRAS** puedan entenderlos sin dificultad. No obstante, hay algunos problemas que, por su complicación o materia que tratan, son más propios para los alumnos de **CIENCIAS**.

Con este libro de problemas, que abarca de forma unitaria todas las materias de la MATEMATICA COMUN, hemos pretendido dos objetivos :

1) Que el alumno llegue a dominar las técnicas de resolución de ejercicios , y

2) Que el alumno llegue a presentar los ejercicios resueltos con claridad y elegancia, explicando de forma precisa y progresiva cada uno de los pasos que entran en su resolución.

Por último, conviene señalar que las soluciones dadas aquí a los problemas no son únicas y que el alumno puede dar otras tal vez más claras y elegantes. Por eso, antes de mirar la solución hay que tratar de resolver el problema personalmente.

LOS AUTORES

1 ALGEBRA DE P(U)

en el que se desarrollan las siguientes materias:

1. IDEA DE CONJUNTO
2. RELACION DE PERTENENCIA
3. DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTAR UN CONJUNTO
4. RELACION DE INCLUSION
5. IGUALDAD DE CONJUNTOS
6. UNION DE CONJUNTOS
7. INTERSECCION DE CONJUNTOS
8. COMPLEMENTACION
9. ALGEBRA DE CLASES

1.1. Representar por extensión y por comprensión los siguientes conjuntos :

a) Conjunto de provincias españolas que empiecen su nombre por M.

b) Conjunto de los meses del año en los que ninguno de sus días cae en fechas correspondientes al otoño.

c) Conjunto de números pares divisibles por 6 y comprendidos entre 8 y 25.

d) Conjunto de los números enteros comprendidos entre $-\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{3}$.

(JRV- I - 1)

SOLUCION :

a) Designamos por M el conjunto pedido, entonces

1°) por extensión , M = {Madrid, Málaga, Murcia}

2°) por comprensión M = {x/x es provincia española cuyo nombre comienza por M}

b) Designamos por A el conjunto pedido,entonces

1°) por extensión , A = {Enero,Febrero,Marzo,Abril,Mayo,Junio,Julio,Agosto}

2°) por comprensión,A = {x/x es un mes en el que ninguno de sus días cae en otoño}

c) Designamos por B el conjunto pedido , entonces

1°) por extensión , $B = \{12,18,24\}$

2°) por comprensión, $B = \{x \,/\, x = \dot{6} \;\text{ y } 8 < x < 25\}$

d) Finalmente,designemos por C el conjunto pedido, entonces

1°) por extensión , $C = \{-1,0,1,2\}$

2°) por comprensión, $C = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z} \;\text{ y } -\frac{5}{4} < x < \frac{7}{3}\}$

---oooOooo---

1.2. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos:

$A = \{1,2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$B = \{1,8,27,64\}$

$C = \{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34\}$

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

a) A = {x / x es un número primo menor que 20}

b) B = {x / x es cubo de los números naturales 1,2,3 o 4}

c) $C = \{x \,/\, x = a_n \text{ donde } a_o = 0 \,, a_1 = 1 \,, a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \,, a_n < 35\}$

{x / x es un elemento de la sucesión de Fibonacci menor que 35}

Nótese que cada término,excepto los dos primeros se obtienen sumando los dos anteriores.

1.3. Definir por extensión los siguientes conjuntos :

a) $$A = \{a_n / a_o = 1, a_n = a_{n-1} + 3 \ , \ a_n < 30\}$$

b) $$B = \{b_n / b_o = 1 \ , \ b_1 = 2 \ , \ b_n = b_{n-2} + b_{n-1}, b_n < 30\}$$

SOLUCION : *(SELECTIVIDAD- 1976)*

a) Veamos cuáles son los elementos del conjunto A :

$a_o = 1$

$a_1 = a_{1-1} + 3 = a_o + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_2 = a_{2-1} + 3 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = a_{3-1} + 3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$

... ...

Nótese que cada término de esta sucesión de números se obtiene añadiendo al anterior 3. Esta es la ley de formación que siguen.

Por tanto, $$A = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$$

b) Veamos cuáles son los elementos del conjunto B :

$b_o = 1$

$b_1 = 2$

$b_2 = b_{2-2} + b_{2-1} = b_o + b_1 = 1 + 2 = 3$

$b_3 = b_{3-2} + b_{3-1} = b_1 + b_2 = 2 + 3 = 5$

... ...

Nótese que cada término de esta sucesión de números se obtiene añadiendo los dos anteriores.Los dos primeros nos los dan.Esta es la ley de formación.

Por tanto,

$$B = \{1,2,3,5,8,13,21\}$$

---oooOooo---

1.4. Una circunferencia queda determinada en el plano por el centro O y el radio r.Definirla como conjunto de puntos.

SOLUCION :

Si designamos por C(O,r) la circunferencia se tiene :

C(O,r) = {X / X es un punto del plano cuya distancia a O es r}

= $\{X / d(X,O) = r\}$, siendo d(X,O) la distancia del punto X del plano al punto fijo O, el centro.

1.5. Los siguientes conjuntos están definidos por extensión, utilícese alguna propiedad que los defina por comprensión.

a) A = {Octubre,Noviembre,Diciembre,Enero,Febrero,Marzo,Abril, Mayo ,Junio}

b) B = {La Coruña,Lugo,Orense,Pontevedra}

c) C = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

d) D = {2,4,6,8,10,12}

e) E = {1,3,5,7,9} (JRV-I-2)

SOLUCION:

a) A = {x/ x es un mes del curso}

b) B = {x/ x es una provincia gallega}

c) C = {x/ x es un número natural de una sola cifra}

d) D = $\{x /\ x \in \mathbb{N}\ ,\ x = \dot{2}\ ,\ 1 < x < 13\}$

= {x/ x es un número natural par comprendico entre 1 y 13}

e) E = {x/ x es un número natural,impar y de una sola cifra}

= {x/ x es un número impar dígito}

---oooOooo---

1.6. Los siguientes conjuntos están definidos por comprensión, defínanse por extensión.

a) A = {x / x es asignatura común de COU}

b) B = {x / x es mes de vacación de verano}

c) $C = \{x \ /\ x \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ 4 \leq x \leq 9\}$

d) $D = \{x \ /\ x \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ -5 < x < 3\}$

e) $E = \{x \ /\ x = 2n + 1 \ \text{ y } \ 0 \leq n \leq 10\}$

(JRV-I-3)

SOLUCION:

a) A = {Religión,Lengua,Idioma,Matemáticas comunes,F.C.y Social}

b) B = {Julio,Agosto}

c) C = {4,5,6,7,8,9}

d) D = {-4,-3,-2,-1,0,1,2}

e) E = {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21}

NOTA: *La propiedad característica que determina un conjunto no debe ser ambígua.*

Por ejemplo, en b) "x es mes de vacación de verano" , si es para estudiantes es claro que se trata de esos dos, pero para mucha gente también es mes de vacación de verano Junio y Septiembre.

1.7. Dígase si son ciertas las siguientes expresiones:

a) Enero $\in$ {Días de la semana}

b) $4 \in \{x/\ x \in \mathbb{Z}$ y $-7 \leq x \leq 5\}$

c) $3 \in \{x/\ x = 2n + 1\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$

d) $16 \in \{x\ /\ x$ es número primo$\}$

e) $-7 \in \{x\ /\ x \in \mathbb{N}$ y $2 \leq x \leq 8\}$

(JRV-I-4)

S O L U C I O N :

a) Es falsa puesto que el mes Enero no pertenece al conjunto de los días de la semana.

b) Es verdadera ya que $4 \in \mathbb{Z}$ y verifica la relación $-7 \leq 4 \leq 5$

c) La relación dada en c) es cierta puesto que $3 = 2.1 + 1$ y se verifica para $n = 1$.

d) El número 16 es un número compuesto ya que $16 = 8.2 = 4.4$, es decir, tiene divisores distintos de 16 y de 1 y en consecuencia no es un número primo.La relación d) es falsa.

e) Esta relación es falsa puesto que -7 no es un número natural.Tampoco verifica la segunda condición al no estar comprendido -7 entre 2 y 8.

---oooOooo---

1.8. Dado el conjunto $A = \{a,b,c,d,e,f\}$, ¿qué conjuntos satisfacen simultáneamente las relaciones siguientes :

$$\{a,c\} \subset X \quad y \quad X \subset A$$

(JRV-I-6)

S O L U C I O N :

a) Por ser $\{a,c\}$ subconjunto de X , este conjunto debe tener al menos los elementos a y c.

b) Por ser X un subconjunto de A , X poseerá a lo más los elementos de A, es decir, $\{a,b,c,d,e,f\}$.

Teniendo en cuenta estas dos condiciones se obtienen las siguientes soluciones:

1) $\{a,c\}$

2) $\{a,c,b\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,c,f\}$

3) $\{a,c,b,d\}$, $\{a,c,b,e\}$, $\{a,c,b,f\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{a,c,d,f\}$, $\{a,c,e,f\}$

4) $\{a,c,b,d,e\}$, $\{a,c,b,d,f\}$, $\{a,c,b,e,f\}$, $\{a,c,d,e,f\}$

5) $X = \{a,b,c,d,e,f\}$

Nótese también que $X = \{a,c\} \cup X'$, siendo X' un subconjunto de $\{b,d,e,f\}$

El número de soluciones es igual al número de subconjuntos de $\{b,d,e,f\}$, es decir , $2^4 = 16$.

1.9. Consideremos los conjuntos $A = \{0\}$, $B = \emptyset$, $C = \{\emptyset\}$, $D = \{\{\emptyset\}\}$ y $E = 0$. Se pide :

a) ¿Está bien enunciado el problema?.

b) En caso negativo, enunciarlo bien e indicar cuáles de los conjuntos son iguales y cuáles no.

S O L U C I O N :

a) El enunciado del problema está mal puesto que $E = 0$ no es un conjunto.

b) Los restantes son conjuntos. Entre estos conjuntos no hay níguno igual a los demás. En efecto :

1) A es un conjunto unitario cuyo elemento es 0
2) B es el conjunto vacío
3) C es un conjunto unitario cuyo elemento es $\emptyset$
4) D es un conjunto unitario que tiene como elemento a otro conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío.

----oooOooo---

1.10. Dado el conjunto $U = \{1,2,3\}$,formar todos los subconjuntos del mismo.

(JRV-I-8)

S O L U C I O N :

a) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$
b) Subconjuntos de 1 elemento : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$
c) Subconjuntos de 2 elementos : $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$
d) Subconjuntos de 3 elementos : $\{1,2,3\}$

El número total de subconjuntos es $8 = 2^3 = 2^{\text{card}(U)}$.

Por tanto, $\mathcal{P}(U) = \{\{1\} , \{2\} , \{3\} , \{1,2\} , \{1,3\} , \{2,3\} , \{1,2,3\}\}$

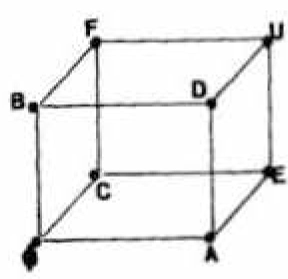
---oooOooo---

1.11. Dibujar el diagrama de inclusión o diagrama de Hasse de los subconjuntos del ejercicio anterior.

S O L U C I O N :

Si ponemos : $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$
$D = \{1,2\}$, $E = \{1,3\}$, $F = \{2,3\}$

se tiene el siguiente diagrama de Hasse :



1.12. Dados los conjuntos

$$A = \{x \ / \ x \text{ es un cuadrado}\}$$
$$B = \{x \ / \ x \text{ es un rectángulo}\}$$
$$C = \{x \ / \ x \text{ es un cuadrilátero}\}$$

escribir, si existen, relaciones de inclusión entre los conjuntos A, B y C.

(JRV-I-5)

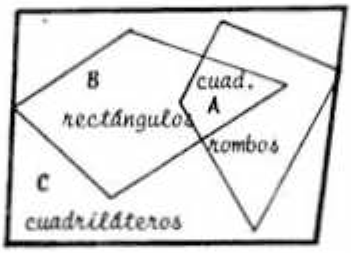
SOLUCION :

a) $A \subset B$ ya que todo cuadrado es rectángulo

b) $A \subset C$ ya que todo cuadrado es cuadrilátero

c) $B \subset C$ ya que todo rectángulo es cuadrilátero.

En la figura adjunta se ha representado el diagrama de Venn de la inclusión.



---oooOooo---

1.13. Dados los conjuntos

$$A = \{x/x \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ x = \dot{2}\}$$
$$B = \{x/x \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ x = \dot{6}\},$$

decir cuál de las siguientes expresiones es cierta :

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \subset A$$

(JRV-I-7)

SOLUCION :

Expresando por extensión los conjuntos A y B (sólo algunos elementos) se tiene

$A = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm14, \pm16, \pm18, \pm20, \pm22, \pm24, \ldots\}$ y

$B = \{0, \pm6, \pm12, \pm18, \pm24, \ldots\}$

Por tanto, los elementos del conjunto B son elementos del conjunto A, luego $B \subset A$.

Nótese que todo elemento de A es múltiplo de 2 y que todo elemento de B es múltiplo de 6 y que todo múltiplo de 6 lo es de 2, y por esto, $B \subset A$.

---oooOooo---

1.14. Cada conjunto posee como subconjuntos a él mismo y al conjunto vacío, que se llaman subconjuntos impropios.

¿Hay algún conjunto que posea un único subconjunto?

(JRV-I-9)

SOLUCION :

Solamente existe un conjunto con un único subconjunto: es $\emptyset$. En efecto :

Sea X un conjunto cualquiera, si este conjunto posee un único subconjunto, los subconjuntos impropios deben coincidir, es decir , $X = \emptyset$.

1.15. Sean: $A = \{a , b , c , d , e\}$

$B = \{b , d , e , f , g\}$.

$C = \{e , g , h , i\}$

Formar : a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $B \cup C$

d) $A \cap B$; e) $A \cap C$; f) $B \cap C$

g) $A \cap (B \cup C)$

h) $(A \cup B) \cap C$

i) $(A \cup B) \cup C$

[JRV-I-11]

SOLUCION :

a) $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

b) $A \cup C = \{a,b,c,d,e,g,h,i\}$

c) $B \cup C = \{b,d,e,f,g,h,i\}$

d) $A \cap B = \{b,d,e\}$

e) $A \cap C = \{e\}$

f) $B \cap C = \{e,g\}$

g) $A \cap (B \cup C) = \{b,d,e\}$

h) $(A \cup B) \cap C = \{e,g\}$

i) $(A \cup B) \cup C = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$

---oooOooo---

1.16. Dados los conjuntos $E = \{1,2,3,4\}$

$F = \{2,4,6,8\}$

$G = \{1,2\}$

formar los siguientes conjuntos :

a) $E \cup F$

b) $E \cup F \cup G$

c) $E \cap G$

d) $(E \cup G) \cap F$

e) $E \cap F$

f) $E \cap (G \cup F)$

g) $E \cap (F \cap G)$

h) $E \cup (G \cap F)$

[JRV-I-12]

SOLUCION :

a) $E \cup F = \{1,2,3,4,6,8\}$

b) $E \cup F \cup G = E \cup F = \{1,2,3,4,6,8\}$ (Nótese que $G \subset E$)

c) $E \cap G = G = \{1,2\}$

d) $(E \cup G) \cap F = E \cap F = \{2,4\}$

e) $E \cap F = (E \cup G) \cap F = \{2,4\}$

f) $E \cap (G \cup F) = \{1,2,4\}$

g) $E \cap (F \cap G) = \{2\}$

h) $E \cup (G \cap F) = \{1,2,3,4\}$

1.17. Sea A el conjunto de los divisores de 12 y B el conjunto de los divisores de 18. Se pide

a) Hallar por extensión A,

b) Hallar por extensión B

c) Hallar $A \cap B$

d) ¿Cuál es el mayor de los elementos de $A \cap B$?
¿Qué nombre recibe?.

SOLUCION :

a) $A = \{x/\ x \text{ es un divisor de } 12\} = \{1,2,3,4,6,12\}$

b) $B = \{x/\ x \text{ es un divisor de } 18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$

c) $A \cap B = \{x/\ x \text{ es un divisor de } 12 \text{ y de } 18\} = \{1,2,3,6\}$

d) El mayor número del conjunto $A \cap B$ es 6.
El número 6 recibe el nombre de *máximo común divisor* de 12 y 18

---oooOooo---

1.18. Demostrar que si A y B son dos conjuntos disjuntos también lo son $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$.

SOLUCION :

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ no son disjuntos, entonces existe un elemento $X \neq \emptyset$ tal que

$$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ y } X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subset A \text{ y } X \subset B$$

$$\Rightarrow \text{existe un } x \ / \ x \in A \text{ y } x \in B$$

$$\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

contradicción con la hipótesis de que A y B son conjuntos disjuntos.

---oooOooo---

1.19. Definir rectas paralelas, rectas secantes y rectas coincidentes en el plano como aplicación de conjuntos.

SOLUCION :

Sean r y s las rectas del plano , entonces :

a) r es paralela a s $= r \parallel s \iff r \cap s = \emptyset$

b) r es secante con s $\iff r \cap s = \{P\}$, siendo P un punto del plano

c) r es coincidente con s $\iff r \cap s = r = s$

---oooOooo---

1.20. Dados los conjuntos A_1, A_2 y A_3, definir :

1) La unión de cada uno con la intersección de los otros dos

2) La intersección de cada uno con la unión de los otros dos.

Aplicación a la baraja española cuando :

A_1 = conjunto de las cartas reyes

A_2 = conjunto de las cartas oros

A_3 = conjunto de las cartas pares.

(SELECTIVIDAD -1976)

S O L U C I O N :

1) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \{x/\ x \in A_1 \quad o \quad x \in (A_2 \cap A_3)\}$

$A_2 \cup (A_1 \cap A_3) = \{x/\ x \in A_2 \quad o \quad x \in (A_1 \cap A_3)\}$

$A_3 \cup (A_1 \cap A_2) = \{x/\ x \in A_3 \quad o \quad x \in (A_1 \cap A_2)\}$

2) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = \{x/\ x \in A_1 \quad y \quad x \in (A_2 \cup A_3)\}$

$A_2 \cap (A_1 \cup A_3) = \{x/\ x \in A_2 \quad y \quad x \in (A_1 \cup A_3)\}$

$A_3 \cap (A_1 \cup A_2) = \{x/\ x \in A_3 \quad y \quad x \in (A_1 \cup A_2)\}$

APLICACION :

1) $A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \{x/\ x$ es rey u oro par$\}$

$A_2 \cup (A_1 \cap A_3) = \{x/\ x$ es oro o rey$\}$, puesto que $A_1 \subset A_3$ y resulta que $A_1 \cap A_3 = A_1$

$A_3 \cup (A_1 \cap A_2) = \{x/\ x$ es carta par$\}$, puesto que $A_1 \cap A_2 = \{$Rey oros$\}$ que es par, y en consecuencia está contenida en A_3

2) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = \{x/\ x$ es rey$\}$

$A_2 \cap (A_1 \cup A_3) = \{x/\ x$ es oro par$\}$

$A_3 \cap (A_1 \cup A_2) = \{x/\ x$ es rey u oro par$\}$

---oooOooo---

1.21. Dar una definición conjuntista de mediatriz del segmento $\overline{AB}$ en el plano.

S O L U C I O N :

Si designamos por $d(P,Q)$ la distancia entre dos puntos del plano, entonces :

Mediatriz de $\overline{AB}$ = $\{ X \ /\ X$ punto del plano y $d(X,A) = d(X,B)\}$

1.22. Demostrar las siguientes leyes distributivas :

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

[JRV-1-13]

S O L U C I O N :

Haremos la demostración de estas dos propiedades por la tabla de pertenencia.

Recordemos : Si x pertenece al conjunto pondremos 1

Si x no pertenece al conjunto pondremos 0.

a)

A	∪	(B	∩	C)	=	(A	∪	B)	∩	(A	∪	C)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*

donde , de las columnas 3 y 5 se obtiene la 4, de las 7 y 9 la 8 ,
de las columnas 11 y 13 se obtiene la 12;
de la 1 y 4 resulta la 2 (primer miembro)
de la 8 y 12 resulta la columna 10 (segundo miembro)
de las columnas 2 y 10 se obtiene finalmente la columna de resultados 6.

b)

A	∩	(B	∪	C)	=	(A	∩	B)	∪	(A	∩	C)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*

La obtención de la sucesivas columnas a partir de los datos se hace de una manera análoga al apartado anterior.

1.23. Siendo $M = \{1,2,3,4,5\}$ y $N = \{1,3\}$, encontrar dos conjuntos A y B no vacíos ,en cada uno de los siguientes casos :

a) $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$, $B = \{1\}$.

b) $B \supset A$, $A \cup B = \{4,5\}$

c) $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2,3,4\}$, $B \cup N = \{1,2,3\}$. (JRV-I-17)

SOLUCION :

a) $B = \{1\}$, luego $A = \{2,3,4,5\}$ para que verifique las condiciones dadas de $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = M$

b) Sí $A \supset B$, entonces $A \cup B = A$, luego $A = \{4,5\}$, y B puede ser cualquiera de los siguientes conjuntos : $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4,5\}$

c) 1°) De $N = \{1,3\}$ y $B \cup N = \{1,2,3\}$ se sigue que B puede ser uno cualquiera de los siguientes conjuntos :

$$\{2\} , \{1,2\} , \{2,3\} , \{1,2,3\}$$

2°) De $A \cap B = \{3\}$ se sigue que B tiene que tener el elemento 3 , luego de las 4 posibilidades de B nos quedan únicamente :

$$\{2,3\} \text{ y } \{1,2,3\}$$

3°) Finalmente, de la relación $A \cup B = \{2,3,4\}$ deducimos que B puede ser únicamente, $\{2,3\}$

4°) Si $B = \{2,3\}$, $A \cap B = \{3\}$ y $A \cup B = \{2,3,4\}$ entonces $A = \{3,4\}$ ya que : el 2 no puede pertenecer a A puesto que la intersección sería $\{2,3\}$

el 3 debe pertenecer a A puesto que $\{3\} = A \cap B$

el 4 debe pertenecer a A puesto que pertenece a la únion de A y B y no pertenece a B.

Por tanto, $A = \{3,4\}$ y $B = \{2,3\}$

---oooOooo---

1.24. Demostrar las siguientes relaciones,

a) $A \subset A \cup B$

b) $B \subset A \cup B$

c) $A \cap B \subset A$

d) $A \cap B \subset B$

siendo A y B dos conjuntos cualesquiera. (JRV-I-14)

SOLUCION :

Para todo x :

a) $x \in A \Rightarrow x \in A$ o $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, luego $A \subset A \cup B$

b) $x \in B \Rightarrow x \in A$ o $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$, luego $B \subset A \cup B$

c) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in A$, luego $A \cap B \subset A$

d) $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in B$, luego $A \cap B \subset B$

1.25. Formar el conjunto $\mathcal{P}(U)$ en cada uno de los siguientes casos :

a) $U = \emptyset$

b) $U = \{1\}$

c) $U = \{1,2\}$

d) $U = \{1,2,3\}$

e) $U = \{1,2,3,4\}$ [JRV-I-78]

SOLUCION :

a) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$

$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset\}$

b) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$

Subconjuntos de 1 elemento : $\{1\}$

$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{1\}\}$

c) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$

Subconjuntos de 1 elemento : $\{1\}$, $\{2\}$

Subconjuntos de 2 elementos : $\{1,2\}$

$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

d) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$

Subconjuntos de 1 elemento : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

Subconjuntos de 2 elementos : $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

Subconjuntos de 3 elementos : $\{1,2,3\}$

$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset , \{1\} , \{2\} , \{3\} , \{1,2\} , \{1,2\} , \{2,3\} , \{1,2,3\}\}$

e) Subconjuntos de 0 elementos : $\emptyset$

Subconjuntos de 1 elemento : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$

Subconjuntos de 2 elementos : $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$

Subconjuntos de 3 elementos : $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$

Subconjuntos de 4 elementos : $\{1,2,3,4\}$

$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},$
$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

---oooOooo---

NOTA : *En el capítulo 4 ,al estudiar el cardinal de un conjunto, demostraremos el siguiente teorema :*

"Si un conjunto finito tiene n elementos, entonces $P(U)$ *es también finito y tiene* 2^n *elementos".*

Este resultado se puede comprobar en el ejercicio anterior, cuando el conjunto tiene 0,1,2,3,4 elementos.

1.26. Dados los conjuntos $A = \{a,b,c,d,e\}$
$B = \{b,d,e,f,g\}$
$C = \{e,g,h,i\}$
del conjunto universal $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$
formar los conjuntos siguientes :

a) A' d) $(A \cap (B \cup C))'$

b) $B' \cup C'$ e) $((A \cup B) \cap C)'$

c) $(B \cap C)'$ f) $(B \cap C \cap A)'$

indicando con ' el conjunto complementario en U. *[JRV-I-16]*

S O L U C I O N :

a) $A' = \{f,g,h,i\}$

b) $B' \cup C' = (B \cap C)' = \{e,g\}' = \{a,b,c,d,f,h,i\}$

c) $(B \cap C)' = \{a,b,c,d,f,h,i\}$ (Nótese que es el mismo conjunto que en b))

d) $(A \cap (B \cup C))' = (A \cap \{b,d,e,f,g,h,i\})'$
$= \{b,d,e\}'$
$= \{a,c,f,g,h,i\}$

e) $((A \cup B) \cap C)' = (\{a,b,c,d,e,f,g\} \cap C)'$
$= \{e,g\}'$
$= \{a,b,c,d,f,h,i\}$

f) $(B \cap C \cap A)' = \{e\}' = \{a,b,c,d,f,g,h,i\}$

NOTA : *La igualdad de los conjuntos dados en a) y b) se verifica siempre y se conoce como la ley de* **MORGAN**.

---oooOooo---

1.27. Hallar el conjunto complementario de la intersección del conjunto unión de los complementarios de A y B con el conjunto unión de los complementarios de A y C. *(**SELECTIVIDAD** - 1976)*

S O L U C I O N :

Tenemos que hallar el conjunto complementario del conjunto : $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$ o lo que es lo mismo $((A' \cup B') \cap (A' \cup C'))'$.

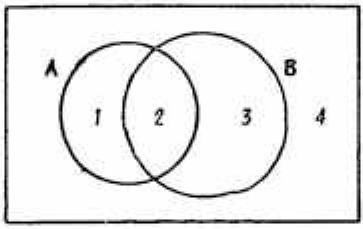
$((A' \cup B') \cap (A' \cup C'))' = (A' \cup B')' \cup (A' \cup C')'$, Ley de Morgan

$= ((A')' \cap (B')') \cup ((A')' \cap (C')')$, "

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$, Ley involutiva

$= A \cap (B \cup C)$, Ley distributiva

1.28. Sean A y B dos subconjuntos de U (conjunto universal). Expresar por medio de la intersección de A,B,A',B' los subconjuntos 1,2,3 y 4 de la siguiente figura :



SOLUCION :

a) La región que determina el subconjunto 1 viene dada por :
$1 = A - B = A \cap B'$

b) El subconjunto 2 viene dado por : $2 = A \cap B$

c) El subconjunto 3 viene dado por : $3 = B - A = B \cap A' = A' \cap B$

d) El subconjunto 4 viene dado por : $4 = (A \cup B)'$
$= A' \cap B'$, por la ley de Morgan

---oooOooo---

1.29. Representar en un diagrama de Venn la siguiente expresión :

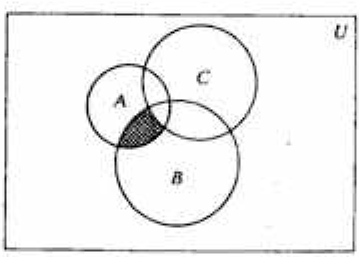
$$\overline{(A \cap B) \cap \bar{C}}$$

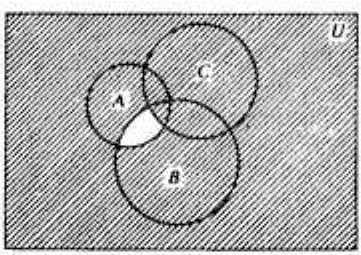
SOLUCION :

$\overline{(A \cap B) \cap \bar{C}} = U - ((A \cap B) \cap \bar{C})$, por la definición de conjunto complementario.

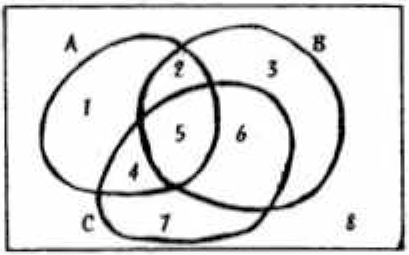
$= U - ((A \cap B) - C)$, por la definición de diferencia

Las figuras siguientes muestran los conjuntos $(A \cap B) - C$ y su complementario:





1.30. Sean A,B y C subconjuntos de U (conjunto universal). Expresar por medio de la intersección de A,B,C,A',B',C' los subconjuntos 1,2,3,4,5,6,7,8 de la siguiente figura :



SOLUCION :

$1 = A - (B \cup C)$

$= A \cap (B \cup C)'$, por definición de -

$= A \cap (B' \cap C')$, por la ley de Morgan

$= A \cap B' \cap C'$, por la asociatividad de $\cap$

$2 = (A \cap B) - C$

$= (A \cap B) \cap C'$, por la definición de -

$= A \cap B \cap C'$, por la asociatividad de $\cap$

$3 = B - (A \cup C)$

$= B \cap (A \cup C)'$, por la definición de -

$= B \cap (A' \cap C')$, por la ley de Morgan

$= A' \cap B \cap C'$, por la asociatividad de $\cap$

$4 = (A \cap C) - B$

$= (A \cap C) \cap B'$, por definición de -

$= A \cap B' \cap C$, por la asociatividad de $\cap$

$5 = A \cap B \cap C$

$6 = (B \cap C) - A$

$= (B \cap C) \cap A'$, por definición de -

$= A' \cap B \cap C$, por la asociatividad de $\cap$

$7 = C - (A \cup B)$

$= C \cap (A \cup B)'$, por definición de -

$= C \cap (A' \cap B')$, por la ley de Morgan

$= A' \cap B' \cap C'$, por la asociatividad de $\cap$

$8 = (A \cup B \cup C)' = (A \cup (B \cup C))'$

$= A' \cap (B \cup C)' = A' \cap (B' \cap C')$, por las leyes de Morgan

$= A' \cap B' \cap C'$, por la asociatividad de $\cap$

1.31. Dados los conjuntos A y B y sus correspondientes conjuntos complementarios A' y B' , demuéstrese que si $A \subset B$ se cumplen las igualdades :

a) $A \cap B = A$

b) $A \cup B = B$

c) $B' \subset A'$

d) $A' \cup B = U$ (U conjunto universal)

e) $A \cap B' = \emptyset$ *(JRV-I-25 - Selectividad 1975)*

SOLUCION :

a) $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$

$= \{x \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \in A\}$ ya que $A \subset B$

$= \{x \ / \ x \in A\}$

$= A$

b) $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$

$= \{x \ / \ x \in B \ \text{ o } \ x \in B\}$ ya que $A \subset B$

$= \{x \ / \ x \in B\}$

$= B$

c) Para todo $x \in B' \Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A$ ya que $A \subset B$

$\Rightarrow x \in A'$

luego $B' \subset A'$

d) $A' \cup B = \{x \ / \ x \in A' \ \text{ o } \ x \in B\}$

$= \{x \ / \ x \in A' \ \text{ o } \ x \in A\}$

$= \{x \ / \ x \in U\}$

$= U$

e) $A \cap B' = \{x \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B'\}$

$= \{x \ / \ x \in A \ \text{ y } \ x \in A'\}$

$= \emptyset$

NOTA : *Los ejercicios a) , b) , d) y e) se pueden demostrar probando la doble inclusión. Lo hacemos para el primero :*

1) $A \cap B \subset A$ *puesto que todo elemento de la intersección pertenece por definición a los dos conjuntos*

2) *Si* $x \in A$, *entonces* $x \in A$ *y* $x \in B$, *puesto que* $A \subset B$ *y de aquí* $x \in A \cap B$

luego $A \subset A \cap B$.

De 1) y 2) se sigue la igualdad a).

1.32. Simplificar la expresión $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$, en donde A' y B' son los complementarios de A y B respectivamente.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

Primer método :

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) &= ((A \cup B) \cap (A \cup B')) \cap (A' \cup B) && \text{, p. asociat.}\\ &= (A \cup (B \cap B')) \cap (A' \cup B) && \text{, p. distrib.}\\ &= (A \cup \emptyset) \cap (A' \cup B) && \text{, p. de compl.}\\ &= A \cap (A' \cup B) && \text{, identidad}\\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B) && \text{, p. distrib.}\\ &= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{, p. de compl.}\\ &= A \cap B && \text{, identidad}\end{aligned}$$

Segundo método:

Si expresamos por 1 la pertenencia de un elemento al conjunto , y
por 0 la no pertenencia ,
entonces se puede contruir la siguiente tabla de verificación :

A	B	A'	B'	$A \cup B$	$A \cup B'$	$A' \cup B$	$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0

El resultado obtenido es equivalente a la tabla de conjunto $A \cap B$, luego

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B) = A \cap B$$

---oooOooo---

1.33. Simplificar la siguiente expresión :

$$((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cup ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))$$

siendo $\bar{A}$ y $\bar{B}$ los complementarios de A y B respectivamente.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

$$\begin{aligned}((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cup ((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) &= (A \cup (B \cap \bar{B})) \cup ((A \cup \bar{A}) \cap B)), && [1]\\ &= (A \cup \emptyset) \cup (U \cap B) && , [2]\\ &= A \cup B && , [3]\end{aligned}$$

donde, en [1] se ha aplicado la propiedad distributiva ,
en [2] se ha aplicado la propiedad de complementación,
en [3] se ha aplicado la propiedad del elemento neutro.

1.34. Se define la diferencia de dos conjuntos A y B , y se representa por A-B , al conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B, es decir,

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$$
$$= \{x/x \in A \text{ y } x \in B'\}$$
$$= A \cap B'$$

Demostrar que : $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(JRV-I-23)

SOLUCION :

$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)'$, según la definición -

$= A \cap (B' \cup C')$, según la ley de Morgan

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$, propiedad distributiva

$= (A - B) \cup (A - C)$, según la definición de -

---oooOooo---

1.35. Dados los conjuntos A , B y C , pruébese si se cumplen o no las siguientes expresiones :

a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

b) $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

a) $(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)'$, definición de -

$= (A \cap B) \cap (A' \cup C')$, leyes de Morgan,

$= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C')$, ley distributiva

$= \emptyset \cup (A \cap B \cap C')$, ley de complementación

$= A \cap B \cap C'$

$= A \cap (B \cap C')$, asociatividad

$= A \cap (B - C)$, definición de -

b) Consideremos los siguientes conjuntos :

$A = \{1,2,5,6,7\}$
$B = \{4,5,6,8,10\}$
$C = \{3,4,5,7,13\}$

entonces : $B - C = \{6,8,10\}$ y $A \cup (B - C) = \{1,2,5,6,7,8,10\}$

$A \cup B = \{1,2,4,5,6,7,8,10\}$
$A \cup C = \{1,2,3,4,5,7,13\}$
y de aquí obtenemos :
$(A \cup B) - (A \cup C) = \{8,10\}$

Por tanto , $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$

De a) y b) se sigue que las dos relaciones dadas son verdaderas.

1.36. Dados dos conjuntos A y B y sus correspondientes conjuntos complementarios A' y B' , demuéstrese que

$$A' - B' = B - A$$

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

SOLUCION :

a) Primer método :

$A' - B' = \{x \ / \ x \in A' \text{ y } x \notin B'\}$, por definición de diferencia

$= \{x \ / \ x \notin A \text{ y } x \in B\}$, por definición de '

$= \{x \ / \ x \in B \text{ y } x \notin A\}$, conmutatividad de "y"

$= B - A$, por definición de diferencia

b) Segundo método.

Tendremos que demostrar : 1°) $A' - B' \subset B - A$

2°) $B - A \subset A' - B'$

1°) Para todo $x \in A' - B' \Rightarrow x \in A' \text{ y } x \notin B'$

$\Rightarrow x \notin A \text{ y } x \in B$

$\Rightarrow x \in B \text{ y } x \notin A \Rightarrow x \in B - A$

luego, $A' - B' \subset B - A$

2°) Para todo $x \in B - A \Rightarrow x \in B \text{ y } x \notin A$

$\Rightarrow x \in B \text{ y } x \in A'$

$\Rightarrow x \notin B' \text{ y } x \in A'$

$\Rightarrow x \in A' \text{ y } x \notin B' \Rightarrow x \in A' - B'$

luego, $B - A \subset A' - B'$

De 1°) y 2°) se sigue el enunciado.

---oooOooo---

1.37. Demostrar la identidad :

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

(*JRV-I-24*)

SOLUCION :

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$, por la definición de -

$= ((A \cap B') \cup B) \cap ((A \cap B') \cup A')$, ley distributiva

$= (A \cup B) \cap (B \cup B') \cap (A \cup A') \cap (B' \cup A')$, ley distribut.

$= (A \cup B) \cap (B' \cup A')$, ley de complementación

$= (A \cup B) \cap (B \cap A)'$, ley de Morgan

$= (A \cup B) - (A \cap B)$, por la definición -

1.38. Dados los conjuntos A y B incluidos en el conjunto U, pruébese si se cumplen o no las siguientes igualdades:

a) $$A - B = B' - A' = A \cap B'$$

b) $$(A \cup B)' = B' \cap A'$$

en donde A' y B' son los conjuntos complementarios de A y B respectivamente y $(A \cup B)'$ es el conjunto complementario de $A \cup B$.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

SOLUCION:

a)
$$\begin{aligned}
A - B &= \{x \,/\, x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\} && \text{, por definición de diferencia}\\
&= \{x \,/\, x \notin A' \ \text{ y } \ x \in B'\} && \text{, por definición de complementario}\\
&= \{x \,/\, x \in B' \ \text{ y } \ x \notin A'\} && \text{, conmutatividad de y}\\
&= B' - A' && \text{, por definición de fiferencia}\\
&= \{x \,/\, x \in B' \ \text{ y } \ x \notin A'\} && \text{, por definición de diferencia}\\
&= \{x \,/\, x \in B' \ \text{ y } \ x \in A\} && \text{, por definición de complementario}\\
&= \{x \,/\, x \in A \ \text{ y } \ x \in B'\} && \text{, conmutatividad de y}\\
&= A \cap B' && \text{, definición de } \cap
\end{aligned}$$

b) Esta relación es en realidad una de las leyes de Morgan. Veamos su demostración.

$$\begin{aligned}
(A \cup B)' &= \{x \,/\, x \notin (A \cup B)\}\\
&= \{x \,/\, x \notin A \ \text{ y } \ x \notin B\}\\
&= \{x \,/\, x \in A' \ \text{ y } \ x \in B'\}\\
&= A' \cap B'
\end{aligned}$$

---oooOooo---

1.39. Demostrar que $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$ implican que $B = C$

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

SOLUCION:

Se tienen las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned}
B &= B \cap (B \cup A) && \text{, propiedad simplificativa}\\
&= B \cap (C \cup A) && \text{, por hipótesis}\\
&= (B \cap C) \cup (B \cap A) && \text{, propiedad distributiva}\\
&= (B \cap C) \cup (C \cap A) && \text{, por hipótesis}\\
&= (C \cap B) \cup (C \cap A) && \text{, propiedad conmutativa}\\
&= C \cap (B \cup A) && \text{, propiedad distributiva}\\
&= C \cap (A \cup C) && \text{, por hipótesis}\\
&= C && \text{, propiedad simplificativa.}
\end{aligned}$$

(*Esta demostración está tomada del libro* **AC**-1 - *Primera parte* - 1 - 1)

1.40. Se tiene que $(A - B) \cup (B - A) = C$. Demostrar que $(A - C) \cup (C - A) = B$

(SELECTIVIDAD - 1976)

S O L U C I O N :

$$(A - C) \cup (C - A) = (A \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{A}) \qquad [1]$$

$$= (A \cap \overline{((A - B) \cup (B - A))}) \cup (((A - B) \cup (B - A)) \cap \bar{A}) \qquad [2]$$

$$= (A \cap \overline{((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))}) \cup (((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) \cap \bar{A}) \qquad [3]$$

$$= (A \cap (\overline{(A \cap \bar{B})} \cap \overline{(B \cap \bar{A})})) \cup (((A \cap \bar{B}) \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) \cap \bar{A})) \qquad [4]$$

$$= (A \cap ((\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A))) \cup (\emptyset \cup (B \cap \bar{A})) \qquad [5]$$

$$= ((A \cap (\bar{A} \cup B)) \cap (\bar{B} \cup A)) \cup (B \cap \bar{A}) \qquad [6]$$

$$= (((A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)) \cap (\bar{B} \cup A)) \cup (B \cap \bar{A}) \qquad [7]$$

$$= ((A \cap B) \cap (\bar{B} \cup A)) \cup (B \cap \bar{A}) \qquad [8]$$

$$= (((A \cap B) \cap \bar{B}) \cup ((A \cap B) \cap A)) \cup (B \cap \bar{A}) \qquad [9]$$

$$= (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \qquad [10]$$

$$= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \qquad [11]$$

$$= (A \cup \bar{A}) \cap B \qquad [12]$$

$$= B \qquad [13]$$

donde,en los pasos :

[1] y [3] se ha aplicación la definición de -

[2] , se ha sustituido C por su valor

[4] y [5] , se ha aplicado la ley de Morgan

[4] , [7] ,[9] ,[12] se ha aplicado la propiedad distributiva

[6] , identidad

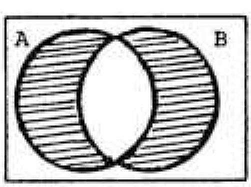
[8] y [12], la propiedad de complementación

[11],la propiedad conmutativa.

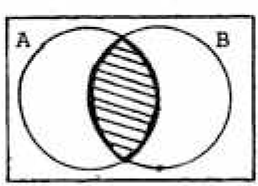
[10] , la propiedad de identidad de la intesección con U y la propiedad idempotente.

[5] , también se ha aplicado la propiedad idempotente.

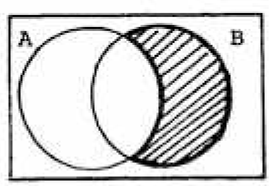
Gráficamente :



;



$\cup$



= B

$C = A \triangle B$ $\qquad$ $A - C = A \cap B$ $\qquad$ $C - A = B - A$

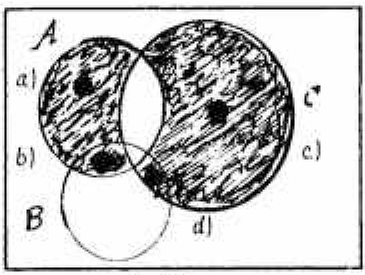
1.41. Se llama diferencia simétrica de dos conjuntos X e Y, y se designa por $X \triangle Y$, al conjunto construido por aquellos elementos que pertenecen a uno y solo uno de los conjuntos X e Y. Demostrar que, para cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C, se verifica que :

$$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$$

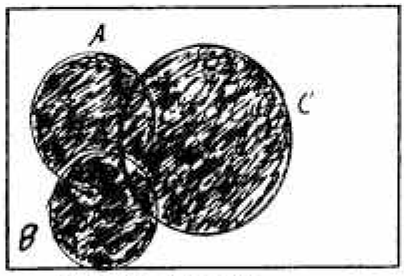
(*SELECTIVIDAD*-1976)

S O L U C I O N :

Consideremos las dos figuras siguientes que representan mediante un diagrama de Venn los conjuntos $A \triangle C$ y $(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$:



$A \triangle C$



$(A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Es evidente que en estos diagramas $A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Veamos la demostración lógicamente.

Si $x \in A \triangle C \Rightarrow x \in A - C$ o $x \in C - A$

$\Rightarrow x \in A$ y $x \notin C$ o $x \in C$ y $x \notin A$

De aquí se pueden obtener los cuatro casos siguientes :

a) $x \in A$ y $x \notin B \Rightarrow x \in A \triangle B \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

b) $x \in A$ y $x \in B \Rightarrow x \in B$ y $x \notin C$

$\Rightarrow x \in B \triangle C \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

c) $x \in C$ y $x \notin B \Rightarrow x \in B \triangle C \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

d) $x \in C$ y $x \in B \Rightarrow x \in B$ y $x \notin A$

$\Rightarrow x \in A \triangle B \Rightarrow x \in (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$

Los cuatro casos a considerar los hemos señalado en la figura 1, con las letras a,b,c,d.

NOTA : *Este ejercicio fue propuesto en el mismo examen que el siguiente:*
"Se llama distancia entre dos conjuntos X e Y, y se representa por d(X,Y), al número de elementos de su diferencia simétrica. Demostrar que para cualesquiera que sean los conjuntos A,B y C se verifica que :

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)"$$

La demostración del ejercicio anterior es la base para demostrar éste.
Véase la demostración en 4.46.

1.42. Pruébese si se cumplen o no las siguientes igualdades:

a) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

b) $(A - B)' = A' \cup B$

en donde $(A - B)'$ es el conjunto complementario de $A - B$, y A' es el conjunto complementario de A.

[*SELECTIVIDAD - 1976*]

SOLUCION:

a)
$$\begin{aligned}
(A - C) - (B - C) &= (A \cap C') - (B \cap C') && \text{, definición de } - \\
&= (A \cap C') \cap (B \cap C')' && \text{, definición de } - \\
&= (A \cap C') \cap (B' \cup C) && \text{, leyes de Morgan} \\
&= (A \cap C' \cap B') \cup (A \cap C' \cap C) && \text{, ley distributiva} \\
&= (A \cap C' \cap B') \cup \emptyset \\
&= A \cap C' \cap B' \\
&= (A \cap B') \cap C' && \text{, ley asociativa} \\
&= (A - B) - C && \text{, definición de } -
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
(A - B)' &= \{x \,/\, x \notin (A - B)\} \\
&= \{x \,/\, x \notin A \text{ o } x \in B\} \\
&= \{x \,/\, x \in A' \text{ o } x \in B\} = A' \cup B
\end{aligned}$$

Otra demostración :

$$\begin{aligned}
(A - B)' &= (A \cap B')' && \text{, por definición de } - \\
&= A' \cup (B')' && \text{, por las leyes de Morgan} \\
&= A' \cup B && \text{, por la involución de } '
\end{aligned}$$

---oooOooo---

1.43. Demostrar usando el álgebra de clases que

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = U$$

siendo U el conjunto universal.

SOLUCION:

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) &= \\
&= (A \cap (B \cup \bar{B})) \cup (\bar{A} \cap (B \cup \bar{B}) \\
&= (A \cap U) \cup (\bar{A} \cap U) \\
&= A \cup \bar{A} \\
&= U
\end{aligned}$$

En el primer paso se ha aplicado la propiedad distributiva, en el segundo la propiedad de complementación , en el tercero el hecho de que $X \cap U = X$ para cualquier conjunto X, y en el cuarto la misma propiedad de complementación anterior.

1.44. Demostrar las leyes de Morgan aplicando los axiomas del algebra de clases.

S O L U C I O N :

Sea U un conjunto y A y B dos subconjuntos de U, entonces se trata de ver :

i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración de i)

Para demostrar i) hay que probar

a) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

b) $(A \cup B) \cup (A' \cap B') = U$

a)
$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A' \cap B') &= (A' \cap B') \cap (A \cup B) \\
&= ((A' \cap B') \cap A) \cup ((A' \cap B') \cap B) \\
&= ((B' \cap A') \cap A) \cup ((A' \cap B') \cap B) \\
&= (B' \cap (A' \cap A)) \cup (A' \cap (B' \cap B)) \\
&= (B' \cap \emptyset) \cup (A' \cap \emptyset) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup (A' \cap B') &= ((A \cup B) \cup A') \cap ((A \cup B) \cup B') \\
&= ((B \cup A) \cup A') \cap ((A \cup B) \cup B') \\
&= (B \cup ((A \cup A') \cap (A \cup (B \cup B')) \\
&= (B \cup U) \cap (A \cup U) \\
&= U \cup U \\
&= U
\end{aligned}
$$

Demostración de ii)

La demostración de está segunda ley de Morgan se hace de una manera análoga. Basta cambiar $\cup$ por $\cap$ (principio de dualidad)

Se deja como ejercicio.

---oooOooo---

1.45. Demostrar aplicando los axiomas del álgebra de clases que

i) $U' = \emptyset$

ii) $\emptyset' = U$

S O L U C I O N :

i)
$$
\begin{aligned}
U' &= U' \cap U \\
&= U \cap U' \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Por dualidad : ii)
$$
\begin{aligned}
\emptyset' &= \emptyset' \cup \emptyset \\
&= \emptyset \cup \emptyset' \\
&= U
\end{aligned}
$$

1.46. Simplificar usando el álgebra de clases la siguientes expresión:

$$((A \cap B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap C') \cup (A' \cap B)$$

SOLUCION:

$((A \cap B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap C') \cup (A' \cap B) =$

$= ((A \cap B) \cap (C \cup C')) \cup (A' \cap B)$	p. distributiva
$= ((A \cap B) \cap U) \cup (A' \cap B)$	p. de complementación
$= (A \cap B) \cup (A' \cap B)$	p. de U, elemento universal
$= (A \cup A') \cap B$	p. distributiva
$= U \cap B$	p. de complementación
$= B$	p. de U.

---oooOooo-

1.47. Simplificar, usando las propiedades del álgebra de clases, la siguiente expresión:

$$(A \cap (B \cap C')') \cup ((A' \cup B') \cup C)'$$

SOLUCION:

$(A \cap (B \cap C')') \cup ((A' \cup B') \cup C)' =$

$= ((A \cap (B \cap C')') \cup ((A' \cup B')' \cap C')$	ley de Morgan
$= ((A \cap (B \cap C')') \cup ((A \cap B) \cap C')$	ley de Morgan
$= ((A \cap (B \cap C')') \cup (A \cap (B \cap C'))$	p. asociativa
$= A \cap ((B \cap C')' \cup (B \cap C'))$	p. distributiva
$= A \cap U$	p. de complementación
$= A$	

---oooOooo---

1.48. Simplificar, usando las propiedades del álgebra de clases, la siguiente expresión:

$$(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$$

siendo A, B y C subconjuntos de U.

SOLUCION:

$(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$

$= ((A \cap A') \cup (A \cap B)) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$	p. distributiva
$= \emptyset \cup (A \cap B) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$	p. de complementación
$= (A \cap B) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$	p. de $\emptyset$
$= (A \cap B) \cup B \cup B$	p. simplificativa
$= (A \cap B) \cup B$	p. idempotente
$= B$	p. simplificativa

1.49. Demostrar usando el álgebra de clases que :

1) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$

2) $\left.\begin{array}{l} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = C \end{array}\right\} \Rightarrow A = C - B$

3) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

4) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

S O L U C I O N :

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ por la propiedad distributiva,

$= A \cap B$ por ser $A \cap C = \emptyset$

2) $C - B = C \cap B'$ por definición -

$= (A \cup B) \cap B'$ por ser $C = A \cup B$

$= (A \cap B') \cup (B \cap B')$ por la propiedad distributiva

$= A \cup \emptyset$ ya que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B' = A$

3) $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap C')$ por definición de $B - C$

$= (A \cap B) \cap C'$ por la propiedad asociativa de

$= (A \cap B) - C$ por definición de -

4) $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$ por definición de -

$= (A \cap C') \cup (B \cap C')$ por la propiedad distributiva

$= (A - C) \cup (B - C)$ por definición de -

---oooOooo---

1.50. Sean A,B y C tres subonjuntos del conjunto U que verifican las siguientes relaciones:

$$A \subset B \quad , \quad B \subset C \quad y \quad C \subset A$$

Demostrar que $A = B = C$

S O L U C I O N :

a) Por la propiedad transitiva se tiene :

$$\left.\begin{array}{ll} A \subset B \text{ y } B \subset C \Rightarrow & A \subset C \\ \text{Por hipótesis} & C \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = C \quad \text{p. antisimétrica.}$$

b) Por la propiedad transitiva se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} B \subset C \text{ y } C \subset A \Rightarrow & B \subset A \\ \text{Por hipótesis} & A \subset B \end{array}\right\} \Rightarrow A = B \quad \text{p. antisimétrica}$$

c) Por la propiedad transitiva de la igualdad de conjuntos de a) y b) resulta,

$$A = B = C$$

1.51. Se define la siguiente operación entre clases :

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

Demostrar usando el álgebra de clases que :

1) $A + B = B + A$

2) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$

3) $(A + B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

4) $A + (B + C) = (A + B) + C$

5) $A + A = \emptyset$

6) $A + \emptyset = A$

<u>**SOLUCION**</u> :

1) $A + B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B + A$

2) $$\begin{aligned}(A \cap B) + (A \cap C) &= ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B)) \\ &= ((A \cap B) \cap (A \cap C)') \cup ((A \cap C) \cap (A \cap B)') \\ &= ((A \cap B) \cap (A' \cup C')) \cup ((A \cap C) \cap (A' \cup B')) \\ &= (A \cap B \cap C') \cup (A \cap C \cap B') \\ &= A \cap ((B \cap C') \cup (C \cap B')) \\ &= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) = A \cap (B + C)\end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned}(A + B)' &= ((A - B) \cup (B - A))' \\ &= ((A \cap B') \cup (B \cap A'))' \\ &= (A \cap B')' \cap (B \cap A')' \\ &= (A' \cup B) \cap (B' \cup A) \\ &= (A' \cap B') \cup (A \cap B)\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}A + (B + C) &= (A - (B + C)) \cup ((A + C) - A) \\ &= (A \cap (B + C)') \cup ((B + C) \cap A') \\ &= (A \cap ((B' \cap C') \cup (B \cap C))) \cup (((B \cap C') \cup (C \cap B')) \cap A') \\ &= (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C' \cap A') \cup (C \cap B' \cap A') \\ &= (((A \cap B') \cup (B \cap A')) \cap C') \cup (C \cap ((A \cap B) \cup (A' \cap B'))) \\ &= (((A - B) \cup (B - A)) \cap C') \cup (C \cap (A \cap B) \cup (A' \cap B'))) \\ &= ((A + B) \cap C') \cup (C \cap (A + B)') \\ &= ((A + B) - C) \cup (C - (A + B)) \\ &= (A + B) + C\end{aligned}$$

5) $A + A = (A - A) \cup (A - A) = (A \cap A') \cup (A' \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

6) $A + \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = (A \cap \emptyset') \cup (\emptyset \cap A') = A \cup \emptyset = A$

NOTA : La operación suma (+) aquí definida se simboliza también por Δ , y se suele llamar entonces <u>diferencia simétrica</u>

1.52. Usando el álgebra de clases, demostrar que :

1) $A + B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

2) $A \cup C = B \cup C \Leftrightarrow A + B \subset C$

3) $(A \cup C) + (B \cup C) = (A + B) - C$

4) $\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ C = B - A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B - C$

NOTA: Aquí + tiene el significado de Δ *, diferencia simétrica.*

SOLUCION :

1) Sea $A + B = \emptyset$, entonces $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$. De aquí se sigue:

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (B - A) = \emptyset &\Rightarrow A - B = \emptyset \quad y \quad B - A = \emptyset \\ &\Rightarrow A \cap B' = \emptyset \quad y \quad B \cap A' = \emptyset \\ &\Rightarrow A \subset B \quad y \quad B \subset A \\ &\Rightarrow A = B\end{aligned}$$

El recíproco es inmediato.

2) Si $A \cup C = B \cup C$, entonces

$$\begin{aligned}(A + B) \cup C &= (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup C \\ &= (A \cap B') \cup ((B \cup C) \cap (A' \cup C)) \\ &= (A \cap B') \cup ((A \cup C) \cap (A' \cup C)) \\ &= (A \cap B') \cup C \\ &= (A \cup C) \cap (B' \cup C) \\ &= (B \cup C) \cap (B' \cup C) \\ &= (B \cap B') \cup C \\ &= C\end{aligned}$$

El recíproco es inmediato.

3)
$$\begin{aligned}(A \cup C) + (B \cup C) &= ((A \cup C) \cap (B \cup C)') \cup ((B \cup C) \cap (A \cup C)') \\ &= ((A \cup C) \cap (B' \cap C')) \cup ((B \cup C) \cap (A' \cap C')) \\ &= (A \cap B' \cap C') \cup (B \cap A' \cap C') \\ &= ((A \cap B') \cup (B \cap A')) \cap C' \\ &= (A + B) \cap C' \\ &= (A + B) - C\end{aligned}$$

4) Si $C = B - A \Rightarrow C = B \cap A'$

$$\Rightarrow C' = A \cup B'$$

luego ,
$$\begin{aligned}B - C &= B \cap C' \\ &= B \cap (A \cup B') \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap B') \\ &= B \cap A \\ &= A \text{ , pues } A \subset B.\end{aligned}$$

1.53. Los obreros de una fábrica están clasificados por

a) su estado civil (solteros o casados)

b) nacionalidad (españoles o extranjeros)

c) raza (blancos o negros).

Un investigador averigua que un individuo X que está buscando es "soltero o no español blanco".

Otro investigador averigua que ese mismo individuo es "o soltero o extranjero o negro".

¿Cuál de los dos investigadores da más información de X?.

SOLUCION:

Si designamos por $A = \{\text{solteros}\} \Rightarrow A' = \{\text{casados}\}$

$B = \{\text{españoles}\} \Rightarrow B' = \{\text{extranjeros}\}$

$C = \{\text{blancos}\} \Rightarrow C' = \{\text{negros}\}$

a) El primer investigador dice:

"soltero o no español blanco" $\Longleftrightarrow A \cup (B \cap C)' = A \cup B' \cup C'$

b) El segundo investigador dice :

"o soltero o extranjero o negro" $\Longleftrightarrow A \cup B' \cup C'$

De a) y b) se deduce que los dos investigadores dicen lo mismo de X.

---ooo0ooo---

1.54. Demostrar aplicando los axiomas del álgebra de clases que se verifican las relaciones siguientes:

a) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

SOLUCION:

a) $(A \cap B) \cup (A - B) = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, por definción de A-B

$= A \cap (B \cup B')$, propiedad distributiva

$= A \cap U$, definición de complementación.

$= A$, propiedad de U.

b) $(A - B) \cap (A - C) = (A \cap B') \cap (A \cap C')$, por definición de A-B

$= A \cap (B' \cap C')$, propiedad asociativa

$= A \cap (B \cup C)'$, ley de Morgan

$= A - (B \cup C)$, definición de -

---ooo0ooo---

2 ALGEBRA DE PROPOSICIONES

en el que se desarrollan las siguientes materias:

1. PROPOSICIONES
2. VALOR LOGICO DE UNA PROPOSICION
3. IMPLICACION LOGICA
4. EQUIVALENCIA LOGICA
5. DISYUNCION
6. CONJUNCION
7. TABLAS DE VERDAD
8. INFERENCIA LOGICA
9. RAZONAMIENTOS VALIDOS

2.1. Poner 10 ejemplos de proposiciones.

(JRV-II-1)

S O L U C I O N :

1) Madrid es la capital de España
2) Paris es la capital de Italia
3) La Luna es una bola de queso
4) Un triángulo tiene tres lados
5) Los días de la semana son siete
6) Los peces son animales mamíferos
7) Los gatos pardos vuelan durante la noche
8) En el Polo Norte la nieve es negra
9) El hombre es un animal racional
10) El Manzanares es un río que pasa por Madrid

---oooOooo---

2.2. Calcular el correspondiente valor lógico de las proposiciones del ejercicio anterior.

(JRV-II-2)

S O L U C I O N :

a) Las proposiciones 1),4),5),9),10) son proposiciones ciertas, y por tanto, su valor lógico es V o 1.

b) Las proposiciones 2),3),6),7),8) son proposiciones falsas , y por tanto, su valor lógico es F o 0.

---oooOooo---

2.3. De las siguientes frases decir cuáles son proposiciones y su valor lógico :

a) Todos los gatos son negros
b) Este año aprobaré Matemáticas de C.O.U
c) ¿Qué tal estás?
d) Pirri es estudiante de C.O.U.
e) Si llueve las calles se mojan
f) El Quijote fue escrito por Cervantes.

S O L U C I O N :

Son proposiciones : a) , d) , e) , f)

No son proposiciones : b), c)

El valor lógico de a) , e) , f) es 1 , es decir, verdadero.

El valor lógico de d) es 0 , es decir , falso.

2. 4. Dadas las proposiciones p : "Juan es estudiante " , y
q : "Pedro es músico" ,
expresar simbólicamente las proposiciones siguientes en función de p,q y los conectivos correspondientes :

a) Juan es estudiante y Pedro es músico

b) Pedro no es músico.

c) Si Pedro es músico entonces Juan es estudiante

d) Ni Juan es estudiante ni Pedro es músico

e) Tan cierto es que Pedro es músico como que Juan es estudiante.

S O L U C I O N :

a) $p \wedge q$

b) $\bar{q}$

c) $q \rightarrow p$

d) Esta proposición se pude expresar así :

"Juan no es estudiante y Pedro no es músico"

Se tiene por tanto,

$\bar{p} \wedge \bar{q}$

e) Esta proposición se puede expresar así :

"Pedro es músico si y solo si Juan es estudiante"

Se tiene por tanto,

$p \leftrightarrow q$

---oooOooo---

2. 5. Dadas las proposiciones p,q,r,s tales que p y q son verdaderas y r y s falsas, calcular el valor lógico de las siguientes proposiciones :

a) $p \vee r'$

b) $(p \wedge q) \rightarrow r$

c) $(r \vee s) \rightarrow q$

d) $p \leftrightarrow r$

S O L U C I O N :

a) $V(p \vee r') = 1 \vee 1 = 1$

b) $V((p \wedge q) \rightarrow r) = (1 \wedge 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$

c) $V((r \vee s) \rightarrow q) = (0 \vee 0) \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 1 = 1$

d) $V(p \leftrightarrow r) = 1 \leftrightarrow 0 = 0$

2.6. Demostrar que :

a) $p \Rightarrow p$

b) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \Rightarrow (p \longleftrightarrow q)$

c) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

(JRV-II-6)

SOLUCION :

a)

p	$\Rightarrow$	p
1	1	1
0	1	0

b)

((p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	p))	$\Rightarrow$	(p	$\longleftrightarrow$	q)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*

donde ,

de las columnas 1 y 3 resulta 2 , 5 y 7 resulta 6 , de 9 y 11 la 10

de las columnas 2 y 6 resulta la 4

y de las columnas 4 y 10 se obtiene finalmente la 8

c)

((p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	(q	$\rightarrow$	r))	$\Rightarrow$	(p	$\rightarrow$	r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*

donde el cálculo de las sucesivas columnas se hace de la misma manera que en el apartado anterior.

NOTA : *Obsérvese que las implicaciones lógicas de a) y b) son también equivalencias lógicas.*
No sucede lo mismo en c).

2.7. Probar si $(p \wedge p')'$ es una tautología

(JRV-II-10)

SOLUCION :

Una proposición es una tautología cuando siempre toma el valor verdadero.

p	p'	$p \wedge p'$	$(p \wedge p')'$
1	0	0	1
0	1	0	1

por tanto, la expresión dada es una tautología ya que toma siempre el valor verdadero.

---oooOooo---

2.8. Demostrar que $p \Rightarrow (q \rightarrow p)$

(JRV-II-15)

SOLUCION :

p	$\Rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0

puesto que la columna de resultados es de 1 , se tiene que la condicional es una "implicación lógica"

---oooOooo---

2.9. Expresión verbal de las siguientes tablas de verdad :

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

a) La primera tabla nos dice ;

"La disyunción $a \vee b$ de dos proposiciones a y b es verdadera cuando es verdadera al menos una de las proposiciones; en caso contrario es falsa".

b) Las segunda tabla nos dice :

"La conjunción $a \wedge b$ de dos proposiciones a y b es verdadera cuando son verdaderas ambas proposiciones; en caso contrario es falsa".

2.10. Construir la tabla de verdad para la propiedad asociativa de la disyunción y de la conjunción de proposiciones.

[JRV-II-14]

S O L U C I O N :

a)

p	$\vee$	(q	$\vee$	r)	$\Longleftrightarrow$	(p	$\vee$	q)	$\vee$	r
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*

donde,

de las columnas 3 y 5 se obtiene la 4 , de las columnas 7 y 9 la 8

de las columnas 1 y 4 se obtiene la 2 (primer miembro)

de las columnas 8 y 11 se obtiene la 10 (segundo miembro)

de las columnas 2 y 10 resulta finalmente la columna de resultados 6.

Se trata, por tanto, de una equivalencia lógica.

b)

p	$\wedge$	(q	$\wedge$	r)	$\Longleftrightarrow$	(p	$\wedge$	q)	$\wedge$	r
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*

El cálculo de las sucesivas columnas se hace igual que el apartado ante a). Nótese que los datos, columnas datos, son 1,3,5,7,9,11.

---oooOooo---

2.11. Demostrar las propiedades idempotentes :

a) $p \vee p \Leftrightarrow p$

b) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ [JRV-II-9]

SOLUCION :

a)

(p	∨	p)	⟺	p
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0
1	2	3	4	5

b)

(p	∧	p)	⟺	p
1	1	1	1	1
1	0	1	1	0
1	2	3	4	5

donde ,

de las columnas 1 y 3 se obtiene la columna 2 , y

de las columnas 2 y 5 se obtiene la columna de resultados 4.

---oooOooo---

2.12. Demostrar las leyes simplificativas :

a) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$

b) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$ [JRV-II-8]

SOLUCION :

a)

(p	∨	q)	∧	p	⟺	p
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	2	3	4	5	6	7

(p	∧	q)	∨	p	⟺	p
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	2	3	4	5	6	7

donde ,

de las columnas 1 y 3 resulta la columna 2

de las columnas 2 y 5 resulta la columna 4

de las columnas 4 y 7 (nótese que son iguales) se obtiene finalmente la columna 6.

Por tanto, las leyes dadas son equivalencias lógicas.

NOTA : *En el capítulo siguiente veremos una definición abstracta del Algebra de BOOLE. Admitiendo los axiomas del Algebra de Boole las demás propiedades se pueden demostrar sin necesidad de recurrir a las tablas tal como se ha hecho en algunos ejercicios del capítulo 1.*

Las leyes idempotentes y simplificativas serán teoremas en el Algebra de Boole.

2.13. Demostrar las siguientes leyes distributivas :

a) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

b) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(JKV-II-7)

SOLUCION :

a)

p	$\vee$	(q	$\wedge$	r)	$\Leftrightarrow$	(p	$\vee$	q)	$\wedge$	(p	$\vee$	r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*

donde ,

de las columnas 3 y 5 se obtiene 4 , de las 7 y 9 se obtiene 8 y de las columnas 11 y 13 se obtiene 12.

de las columnas 1 y 4 resulta 2 (primer miembro)

de las columnas 8 y 12 resulta 10 (segundo miembro)

de las columnas 2 y 10 se obtiene finalmente la columna de resultados 6

b)

p	$\wedge$	(q	$\vee$	r)	$\Leftrightarrow$	(p	$\wedge$	q)	$\vee$	(p	$\wedge$	r)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*

La obtención de las sucesivas columnas , a partir de las columnas datos de 1,3,5,7,9,11,13 , se realiza de una manera análoga al apartado a).

---oooOooo---

2.14. Demostrar que $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

[JRV-II-12]

SOLUCION :

Una proposición es una tautología cuando siempre toma el valor verdadero.

p	⇒	(p	∨	q)
1	1	1	1	1
1	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	1	0	0	0

por tanto, la expresión dada es una tautología puesto que para cualquier valor de p y q es siempre cierta.

---oooOooo---

2.15. Demostrar que $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología.

[JRV-II-13]

SOLUCION :

Una proposición es una tautología cuando siempre toma el valor verdadero.
Veamos cuál es la tabla de verdad de esta expresión :

(p	∧	q)	⇒	p
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

por tanto, la fórmula dada es una tautología puesto que para cualquier valor de p y q es siempre cierta.

---oooOooo---

2.16. Demostrar que $(p')' \Leftrightarrow p$

(JRV-II-5)

SOLUCION :

La tabla de verdad es la siguiente :

p	p'	(p')'	(p')' ⟺ p
1	0	1	1
0	1	0	1

luego, la relación dada es cierta.

2.17. Determinar si la siguiente proposición

$$(p \wedge q) \rightarrow (\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}})$$

es o no una implicación lógica.

SOLUCION :

Una implicación lógica es una proposición condicional que es una tautología. Veamos cuál es la tabla de verdad de esta proposición:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$	$(p \wedge q) \rightarrow (\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}})$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1

Según se ve en la columna correspondiente al valor lógico de la proposición se trata de una tautología.

Por tanto, la expresión dada es una implicación lógica y se puede escribir así:

$$(p \wedge q) \Rightarrow (\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}})$$

---oooOooo---

2.18. Determinar si la siguiente proposición

$$(p \rightarrow \bar{q}) \leftrightarrow (q \rightarrow \bar{p})$$

es o no una equivalencia lógica.

SOLUCION :

Una equivalencia lógica es una proposición bicondicional que es una tautología. Veamos cuál es la tabla de verdad de esta proposición:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \rightarrow \bar{q}$	$q \rightarrow \bar{p}$	$(p \rightarrow \bar{q}) \leftrightarrow (q \rightarrow \bar{p})$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Según se ve en la columna correspondiente al valor lógico de la proposición dada, se trata de una tautología.

Por tanto, esta expresión es una equivalencia lógica y se puede escribir así:

$$(p \rightarrow \bar{q}) \Longleftrightarrow (q \rightarrow \bar{p})$$

2.19. Demostrar que las proposiciones

$$\overline{p \vee q} \quad \text{y} \quad \bar{p} \wedge \bar{q}$$

son equivalentes.

S O L U C I O N :

Se trata de demostrar que : $\overline{p \vee q} \Longleftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$ *(LEY DE MORGAN)*

-	(p	$\vee$	q)	$\Longleftrightarrow$	(-	p	$\wedge$	-	q)
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

Los datos vienen dados en las columnas 2,4,7,10

1) De las columnas 2 y 4 se obtiene la columna 3
2) La negación de la columna 3 es la columna 1, que es el resultado del primer miembro de la equivalencia.
3) Negación de la columna 7 es la columna 6 ,
   negación de la columna 10 es la columna 9
4) De las columnas 6 y 9 resulta la columna 8 que es el resultado del segundo miembro.
5) De las columnas 1 y 8 se obtiene la columna 5 , lo que nos dice que las proposiciones dadas son equivalentes.

---oooOooo---

2.20. Demostrar que $(\overline{p \wedge q}) \Longleftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

(JRV-II-4)

2.20 C I O N :

La tabla de verdad es la siguiente :

-	(p	$\wedge$	q)	$\Longleftrightarrow$	(-	p	$\vee$	-	q)
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*

LEY DE MORGAN

Los datos vienen dados en las columnas 2,4,7,10

La obtención de las demás columnas se hace de manera análoga al ejercicio anterior.

2.21. Simplificar la siguiente expresión :

$$\overline{(\bar{p} \to \bar{q})} \vee (p \wedge q)$$

(SELECTIVIDAD -1976)

S O L U C I O N :

Primer Método :

Haremos uso de las tablas de verdad :

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \to \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \to \bar{q}}$	$p \wedge q$	$\overline{(\bar{p} \to \bar{q})} \vee (p \wedge q)$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0

De esta tabla se deduce que : $\overline{(\bar{p} \to \bar{q})} \vee (p \wedge q) \iff q$

Segundo Método :

$$\begin{aligned}
\overline{(\bar{p} \to \bar{q})} \vee (p \wedge q) &\iff \overline{(p \vee \bar{q})} \vee (p \wedge q) && \text{, ya que } a \to b \iff \bar{a} \vee b \\
&\iff (\bar{p} \wedge q) \vee (p \wedge q) && \text{, ley de Morgan} \\
&\iff (\bar{p} \vee p) \wedge q && \text{, ley distributiva} \\
&\iff T \wedge q && \text{, T tautología , } T = \bar{p} \vee p \\
&\iff q && \text{, identidad}
\end{aligned}$$

---oooOooo---

2.22. Formar la tabla de verdad de la proposición $p \wedge q \wedge r$ y de su negación.

(SELECTIVIDAD -1975)

S O L U C I O N :

Las tablas de verdad de la proposición dada y de su negación son las siguientes:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$\overline{(p \wedge q) \wedge r}$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

2.23. Demostrar si la siguiente proposición

$$(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee q) \vee q)$$

es una tautología , una contradicción o una expresión indetermina-da. Hágase la tabla correspondiente.

S O L U C I O N :

La tabla de verdad es la siguiente :

(p	$\wedge$	q)	$\rightarrow$	((p	$\vee$	q)	$\vee$	q)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9

donde,

las columnas 1,3,5,7,9 son los datos,

de las columnas 1 y 3 resulta la columna 2,

de las columnas 5 y 7 resulta la columna 6,

de las columnas 6 y 9 resulta la columna 8

de las columnas 2 y 8 resulta la columna 4 , que es la columna de los resultados.

Como todos los valores de la columna 4 son 1 , se tiene que la expresión dada es una tautología

---oooOooo---

2.24. Determinar si la siguiente proposición

$$((p \rightarrow q) \wedge \bar{p}) \leftrightarrow q$$

es una tautología,una contradicción o una expresión indeterminada.

S O L U C I O N :

La tabla de verdad es la siguiente :

p	q	$p \rightarrow q$	$\bar{p}$	$(p \rightarrow q) \wedge \bar{p}$	$((p \rightarrow q) \wedge \bar{p}) \leftrightarrow q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0

La expresión dada puede tomar valores verdaderos o falsos según los valores que toman las proposiciones p y q, por tanto, se trata de una expresión indeterminada.

2.25. Determinar si la siguiente proposición

$$"(p \wedge q) \wedge (\overline{p \vee q})"$$

es una tautología, una contradicción o una expresión indeterminada.

SOLUCION:

Para ver si se trata de una tautología, de una contradicción o de una expresión indeterminada, hallaremos la tabla de verdad o falsedad:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$(p \wedge q) \wedge (\overline{p \vee q})$
1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0

La proposición dada es una <u>contradicción</u> puesto que siempre es falsa sea cual fuere el valor de p y q.

---oooOooo---

2.26. La proposición "Ni p ni q" se llama en álgebra de proposiciones "la negación conjunta". Hallar la tabla de verdad sabiendo que viene definida así :

$$p \downarrow q \Longleftrightarrow \overline{p \vee q} \qquad [1]$$

siendo $\downarrow$ el símbolo de la negación conjunta.

SOLUCION:

La tabla de verdad de [1] viene definida por :

p	q	$p \vee q$	$p \downarrow q \Longleftrightarrow \overline{p \vee q}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

NOTA : *Teniendo en cuenta las leyes de Morgan se tiene :*

$$p \downarrow q \Longleftrightarrow \overline{p \vee q} \Longleftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$$

Por tanto "ni p ni q" es equivalente a "no p y no q"

2.27. Demostrar que si p y q son dos proposiciones equivalentes y r una proposición cualquiera, cada una de las siguientes proposiciones es una tautología:

a) $(p \to r) \iff (q \to r)$

b) $(r \to p) \iff (r \to q)$

c) $(p \wedge r) \iff (q \wedge r)$

d) $(p \vee r) \iff (q \vee r)$ (JRV-II-16)

SOLUCION:

Dos proposiciones equivalentes toman el mismo valor lógico, es decir, las dos son verdaderas o falsas a la vez.

Veamos las tablas de las proposiciones dadas :

a)

(p	→	r)	⟺	(q	→	r)
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

b)

(r	→	p)	⟺	(r	→	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

c)

(p	∧	r)	⟺	(q	∧	r)
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0

d)

(p	∨	r)	⟺	(q	∨	r)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

En los cuatro casos se trata de una tautología, puesto que la columna de los resultados es toda de unos.

---oooOooo---

2.28. Dadas las proposiciones

a = "15 es múltiplo de 5"

b = "Todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía"

c = "Madrid es la capital de Francia"

d = "Carlos I fue el padre de Felipe II"

Calcular :

1°) $V(a)$, $V(b)$, $V(c)$, $V(d)$

2°) $a \vee b$

3°) $a \wedge b$

4°) $(a \vee b) \wedge c$

5°) $(a \wedge b) \vee c$

6°) $a' \wedge b'$

7°) $(a' \wedge b') \wedge c'$

8°) $(d \vee c) \wedge a'$

9°) $(d \wedge b) \vee b'$ (*JRV*-II-3)

S O L U C I O N :

1°) $V(a) = 1$, $V(b) = 0$, $V(c) = 0$, $V(d) = 1$

2°) 15 es múltiplo de 5 o todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía

3°) 15 es múltiplo de 5 y todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía

4°) 15 es múltiplo de 5 o todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía, y Madrid es la capital de Francia.

5°) 15 es múltiplo de 5 y todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía, o Madrid es la capital de Francia.

6°) 15 no es múltiplo de 5 y no todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía.

7°) 15 no es múltiplo de 5 y no todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía y Madrid no es la capital de Francia.

8°) Carlos I fue el padre de Felipe II o Madrid es la capital de Francia , y 15 no es múltiplo de 5.

9°) Carlos I fue el padre de Felipe II y todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía , o no todos los alumnos de C.O.U. estudian Filosofía.

---oooOooo---

2.29. Expresar en función del operador $\vee$ la proposición :

"Es falso que ni Pedro ha aprobado Matemáticas ni Física"

S O L U C I O N :

Sean p = "Pedro ha aprobado Matemáticas" y q = "ha aprobado Física" , luego $\overline{(p \downarrow q)} \Leftrightarrow \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow p \vee q$, de donde la proposición dada es :

"Pedro ha aprobado Matemáticas o Pedro ha aprobado Física"

2.30. Expresar simbólicamente las expresiones :

a) "ser o no ser"

b) "ni chicha ni limonada"

c) "ni son todos los que están ni están todos los que son"

(SELECTIVIDAD -1976)

SOLUCION :

a) Llamemos p a la proposición "tal cosa existe" equivalente a la proposición "ser". Entonces ,

"ser o no ser" $\equiv p \vee \bar{p}$

b) Llamemos p a la proposición : "esto es chicha" , y
q a la proposición : "esto es limonada".

Entonces ,

"ni chicha ni limonada" $\equiv$ "no es chicha y no es limonada" $\equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

c) Sean las proposiciones, p : "son todos los que están"
q : "están todos los que son" ,

entonces ,

"ni son todos los que están ni están todos los que son" $\equiv$

"no son todos los que están y no están todos los que son " $\equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$

---oooOooo---

2.31. Dadas las proposiciones $p = 5 . 4 = 20$

$q = 7 + 3 = 15$

$r = 8 - 5 = 3$

hallar el valor lógico de las siguientes proposiciones :

1°) $p \wedge q$

2°) $p \vee q$

3°) $p \vee \bar{q}$

4°) $p \rightarrow (r \vee \bar{q})$

5°) $((p \vee r) \wedge \bar{p}) \rightarrow r$

SOLUCION :

Los valores lógicos de las proposiciones dadas son : $V(p) = 1$,$V(q) = 0$ y $V(r) = 1$

1°) $V(p \wedge q) = 1 \wedge 0 = 0$

2°) $V(p \vee q) = 1 \vee 0 = 1$

3°) $V(p \vee q) = 1 \vee 1 = 1$

4°) $V(p \rightarrow (r \vee \bar{q})) = 1 \rightarrow (1 \vee 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$

5°) $V(((p \vee r) \wedge \bar{p}) \rightarrow r) = ((1 \vee 1) \wedge 0) \rightarrow 1$

$= (1 \wedge 0) \rightarrow 1$

$= 0 \rightarrow 1$

$= 1$

2.32. Determinar si es verdadera o falsa la siguiente proposición :

"Es falso que la Luna es un queso y que la nieve es negra,o que Madrid es la capital de España".

S O L U C I O N :

Sean p = "la Luna es un queso"

q = "la nieve es negra"

r = "Madrid es la capital de España"

entonces la proposición dada se expresa de la siguiente forma:

$$\overline{(p \wedge q) \vee r}$$

La tabla de verdad para los valores lógicos de las proposiciones dadas es la siguiente :

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$\overline{(p \wedge q) \vee r}$
0	0	1	0	1	0

por tanto, la proposición dada es falsa.

---oooOooo---

2.33. Determinar si es verdadera o falsa la siguiente proposición :

"Es falso que la Luna es un queso y que Madrid es la capital de España, o que la nieve es negra".

S O L U C I O N :

Sean p = "La luna es un queso"

q = "Madrid es la capital de España"

r = "La nieve es negra"

entonces la proposición dada se expresa de la siguiente forma :

$$\overline{(p \wedge q) \vee r}$$

La tabla de verdad para los valores lógicos de las proposiciones dadas es :

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$\overline{(p \wedge q) \vee r}$
0	1	0	0	0	1

por tanto, la proposición dada es verdadera.

---oooOooo---

2.34. ¿Cuál es la negación de la proposición :
"Si llueve las calles se mojan"?.

S O L U C I O N :

Sean p = "llueve" y

q = "las calles se mojan"

entonces la proposición dada es : $p \rightarrow q$.

La negación de esta proposición será :

$$\overline{p \rightarrow q} \iff \overline{\bar{p} \vee q}$$

$$\iff \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} \quad \text{, por la ley de Morgan}$$

$$\iff p \wedge \bar{q} \quad \text{, por la ley de doble negación}$$

por tanto, la proposición pedida es :

"llueve y las calles no se mojan"

NOTA : *Obsérvese que la negación de la proposición dada no es :*
"Si no llueve entonces las calles no se mojan"
puesto que $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$ *no es equivalente a* $\overline{p \rightarrow q}$

Es evidente que las calles se pueden mojar sin que llueva. Todos hemos visto como riegan los barrenderos en las ciudades.

---oooOooo---

2.35. Determinar si es verdadera o falsa la siguiente proposición :
"Si Madrid es la capital de Francia, entonces Napoleón fue rey de España"

S O L U C I O N :

Sean p = "Madrid es la capital de Francia" y

q = "Napoleón fue rey de España" ,

entonces la proposición dada es : $p \rightarrow q$.

La tabla de verdad es :

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Siendo la proposición p falsa , se sigue que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera como se ve observando los dos últimos casos de la tabla.

2.36. ¿Cuál es la negación de la proposición :
"Pedro ha aprobado Matemáticas y Juan ha aprobado Física"?.

SOLUCION :

Sean p = "Pedro ha aprobado Matemáticas" y

q = "Juan ha aprobado Física" ,

entonces la proposición dada es : $p \wedge q$

La negación de esta proposición será : $(p \wedge q)' \iff (p' \vee q')$

teniendo en cuenta las leyes de Morgan. Por tanto, la negación de la proposición pedida es :

"Pedro no ha aprobado Matemáticas o Juan no ha aprobado Física"

NOTA : *Obsérvese que la negación no es :*

"Pedro no ha aprobado Matamáticas y Juan no ha aprobado Física"

---oooOooo---

2.37. ¿Cuál es la negación de la proposición :
"Pedro ha aprobado Matemáticas o Juan ha aprobado Física"?.

SOLUCION :

Sean p = "Pedro ha aprobado Matemáticas" y

q = "Juan ha aprobado Física" ,

entonces la proposición dada es : $p \vee q$

La negación de esta proposición será : $(p \vee q)' \iff (p' \wedge q')$

teniendo en cuenta las leyes de Morgan. Por tanto, la negación de la proposición pedida es :

"Pedro no ha aprobado Matemáticas y Juan no ha aprobado Física"

NOTA : *Obsérvese que la negación no es :*

"Pedro no ha aprobado Matemáticas o Juan no ha aprobado Física".

---oooOooo---

2.38. Se llama "ley de tercio excluso" a $p \vee p'$. Demostrar que es una tautología.

(JRV-II-11)

SOLUCION :

En efecto ,

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

2.39. Comprobar si el razonamiento siguiente es válido o inválido:

$$\begin{array}{l} P_1:\ p \rightarrow q \\ P_2:\ \bar{q} \\ \hline C:\ \bar{p} \end{array}$$

APLICACION : Estudiar la validez del siguiente razonamiento:
"Si llueve las calles se mojan.
No se han mojado las calles.
Luego, no ha llovido".

S O L U C I O N :

Veamos que el razonamiento es válido, es decir, que se trata de una tautología.

(p	→	q)	∧	-	q	⇒	-	p
1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0

Esta tautología recibe en Lógica el nombre de "Ley de modus tollendo tollens"

A P L I C A C I O N :

El razonamiento dado es válido.

En el ejemplo : p = "llueve"
q = "las calles se mojan"

---oooOooo---

2.40. Demostrar por reducción al absurdo la validez del siguiente razonamiento :

$$\begin{array}{l} P_1:\ p \rightarrow q \\ P_2:\ p \\ \hline C:\ q \end{array}$$

S O L U C I O N :

Un razonamiento es válido cuando la conclusión es verdadera.

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir, que q es falsa. Entonces de $V(q) = 0$ y $V(p \rightarrow q) = 1$ se sigue que $V(p) = 0$.

Por otra parte, como p es una premisa es verdadera; luego el hecho de suponer que la conclusión es falsa nos lleva a una contradicción.

Por tanto, q es verdadera y el razonamiento válido.

2.41. Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

"Si llueve las calles se mojan.
Están mojadas las calles.
Luego , ha llovido".

SOLUCION :

Sean p = "llueve"
q = "las calles se mojan" ,

entonces la argumentación anterior se escribe así:

$$\begin{array}{l} P_1 : p \to q \\ P_2 : q \\ \hline C : p \end{array}$$

Como las premisas P_1 y P_2 se consideran siempre verdaderas, se tiene :
$V(q) = 1$, es decir, q es verdadera.
De $V(q) = 1$ y $V(p \to q) = 1$ se sigue que $V(p) = 1$ o bien $V(p) = 0$.
Por tanto, la conclusión p puede ser verdadera o falsa.
Nótese,por tanto, que el estar las calles mojadas no implica que haya llovido, puesto que las han podido regar los barrenderos.

---oooOooo---

2.42. Estudiar la validez del siguiente razonamiento :

"Si las gaviotas están en la playa es que la tarde está cayendo.
Las gaviotas están en la playa.
Luego, la tarde está cayendo".

SOLUCION :

Sean p = "las gaviotas están en la playa"
q = "la tarde está cayendo"

entonces el razonamiento dado se simboliza por :

$$\begin{array}{l} P_1 : p \to q \\ P_2 : p \\ \hline C : q \end{array}$$

La premisa P_2 es verdadera , por tanto p es verdadera.
De p verdadera y $p \to q$ verdadera se sigue que q es verdadera.
La conclusión es verdadera, luego el razonamiendo es válido.

2.43. Estudiar la validez del siguiente razonamiento:

$$\begin{array}{l} P_1 : \; p \vee q \\ P_2 : \; q \rightarrow r \\ P_3 : \; \bar{r} \\ \hline C : \; p \end{array}$$

Poner un ejemplo.

SOLUCION:

1) Se trata de ver que la proposición :

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \bar{r}) \Rightarrow p$$

es una tautologia.Puede hacerse la tabla de verdad y comprobar que así es. Ahora bien,como en un razonamiento suponemos que las premisas son ciertas, vamos a deducir de este hecho que p es verdadera.

a) $V(\bar{r}) = 1$, luego $V(r) = 0$

b) De $V(r) = 0$ y $V(q \rightarrow r) = 1$, se sigue que $V(q) = 0$

c) De $V(q) = 0$ y $V(p \vee q) = 1$, se sigue que $V(p) = 1$

Por tanto la proposición p es cierta y el razonamiento verdadero.

2) Veamos ahora un ejemplo del razonamiento dado:

"Pedro es estudiante o albañil.
Si es albañil está en el ramo de la construcción.
No está en el ramo de la construcción,
luego, es estudiante".

---oooOooo---

2.44. Estudiar la validez del siguiente razonamiento :

"Todos los españoles son europeos.
Todos los europeos son mortales.
Luego todos los españoles son mortales".

SOLUCION:

Sean p = "ser español" , q = "ser europeo" , r = "ser mortal ,

entonces el razonamiento dado se expresa simbólicamente así :

$$\begin{array}{l} P_1 : \; p \rightarrow q \\ P_2 : \; q \rightarrow r \\ \hline C : \; p \rightarrow r \end{array}$$

Este razonamiento es válido puesto que se trata de la propiedad transitiva de la implicación, que es una tautología, es decir :

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

2.45. Demostrar, por reducción al absurdo, la validez del siguiente razonamiento :

$$\begin{array}{l} P_1 : p \rightarrow q \\ P_2 : p \leftrightarrow \bar{r} \\ P_3 : \bar{q} \\ \hline C \ : r \end{array}$$

SOLUCION :

Un razonamiento es válido cuando la conclusión es verdadera.

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir, $V(r) = 0$.

1) $V(\bar{r}) = 1$

2) De $V(p \rightarrow \bar{r}) = 1$ y de 1) se sigue que $V(p) = 1$

3) De $V(p \leftrightarrow q) = 1$ y de $V(p) = 1$ se sigue que $V(q) = 1$

4) Por otra parte, como $\bar{q}$ es premisa $V(\bar{q}) = 1$, luego $V(q) = 0$

Por tanto, al suponer que r es falsa hemos llegado al absurdo de que q es verdadera y falsa a la vez.

En consecuencia, r es verdadera y el razonamiento válido.

---oooOooo---

2.46. Estudiar si el razonamiento siguiente es válido o inválido:

$$\begin{array}{l} P_1 : p \vee q \vee r \\ P_2 : \bar{p} \wedge \bar{q} \\ \hline C \ : r \end{array}$$

Poner un ejemplo.

SOLUCION :

La ley de modus tollendo ponens es: $(a \vee b) \wedge \bar{a} \Rightarrow b$.

Si sustituimos a por $p \vee q$, entonces

$$\bar{a} = (\overline{p \vee q}) = \bar{p} \wedge \bar{q} \quad \text{por la ley de Morgan ,}$$

Luego, nos queda el razonamiento siguiente :

$$(((p \vee q) \vee r) \wedge (\bar{p} \wedge \bar{q})) \Rightarrow r$$

que será, por tanto, una tautología. Se tiene, pues que el razonamiento dado es válido.

EJEMPLO : "Pedro canta , baila o juega.
Pedro no canta y no baila.
Luego, Pedro juega".

2.47. Si $p \rightarrow q$, representa el teorema directo, expresar el teorema recíproco, el contrario y el contrarecíproco.
Ejemplo y equivalencia de las proposiciones $p \rightarrow q$ y $p' \vee q$.

(SELECTIVIDAD - 1975)

SOLUCION:

a) $p \rightarrow q$, teorema directo donde p es la hipótesis y q la tesis
b) $q \rightarrow p$, teorema recíproco
c) $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$, teorema contrario
d) $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$, teorema contrarrecíproco

NOTA : *Recordemos que :*

teorema directo $\leftrightarrow$ *teorema contrarrecíproco*

teorema contrario $\leftrightarrow$ *teorema recíproco*

La demostración es inmediata por las tablas de verdad.

Veamos ahora la segunda parte del ejercicio.
Las proposiciones $p \rightarrow q$ y $p' \vee q$ son equivalentes si y solo si

$$p \rightarrow q \leftrightarrow p' \vee q$$

es una tautología.

p	$\rightarrow$	q	$\leftrightarrow$	$-$	p	$\vee$	q
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0

Puesto que la columna de resultados es todo unos, se trata de una tautología.

EJEMPLO : Si Pedro estudia, entonces aprobará el exámen de Matemáticas.

En este caso : p = Pedro estudia
q = Pedro aprobará el exámen de Matemáticas.

Por tanto, la proposición equivalente a la dada es :

"Pedro no estudia o Pedro aprobará el exámen de Matemáticas"

Teorema recíproco : Si Pedro ha aprobado el examen de Matemáticas, entonces ha estudiado.

Teorema contrario : Si Pedro no estudia, entonces no aprobará el examen de Matemáticas.

Teorema contrarrecíproco : Si Pedro no ha aprobado el examen de Matemáticas, entonces no ha estudiado.

2.48. La suma de los n primeros números viene dada por la siguiente fórmula :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostrarla por el método de inducción.

S O L U C I O N :

a) La fórmula se verifica para $n = 1$. En efecto :

$$1 = \frac{1.(1+1)}{2} \iff 1 = \frac{2}{2} = 1$$

b) Supongamos que la fórmula es válida para $n = h$, es decir ,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + h = \frac{h(h+1)}{2} \qquad [1]$$

c) Se trata ahora de demostrar que la fórmula sigue siendo válida para $n = h+1$

Sumando a los dos términos de la ecuación [1] , $h + 1$, se tiene :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + h + (h+1) = \frac{h(h+1)}{2} + (h+1)$$

$$\iff 1 + 2 + 3 + \ldots + h + (h+1) = \frac{h(h+1) + 2(h+1)}{2}$$

$$\iff 1 + 2 + 3 + \ldots + h + (h+1) = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

que es la fórmula dada para $n = h + 1$,luego la ecuación dada es cierta.

---oooOooo---

2.49. La suma de los n primeros números impares viene dada por la siguiente fórmula :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Demostrarla por inducción.

S O L U C I O N :

a) Es evidente que se verifica para $n = 1$ (Comprúebese para $n = 2,3$)

b) Supongamos que la fórmula es válida para $n = h$, es decir,

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2h - 1) = h^2 \qquad [1]$$

c) Se trata ahora de demostrar que la fórmula sigue siendo válida para $n = h+1$

Sumando a los dos miembros de la ecuación [1] , $2h + 1$, se tiene :

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2h-1) + (2h+1) = h^2 + (2h+1) \iff$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2h-1) + (2h+1) = (h+1)^2$$

que es la fórmula dada para $n = h + 1$.

Por tanto la ecuación dada es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

3 ALGEBRA DE BOOLE

en el que se desarrollan las siguientes materias:

1. AXIOMATICA DE UN ALGEBRA DE BOOLE
2. PROPIEDADES
3. APLICACION DEL ALGEBRA DE BOOLE A LOS CIRCUITOS LOGICOS
4. CIRCUITOS EQUIVALENTES
5. TABLAS DE RESPUESTAS
6. SISTEMA BINARIO

3.1. Se dice que un conjunto A, juntamente con dos operaciones definidas en A, y que simbolizaremos por + y . , es un algebra de BOOLE si se verifican los axiomas siguientes :

A_1 : Propiedades conmutativas.

$a + b = b + a \quad ; \quad a \cdot b = b \cdot a$

A_2 : Propiedades distributivas.

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \; ; \; a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

A_3 : Elementos cero y unidad

A tiene dos elementos que se designan por 0 y 1 con las siguientes propiedades :

$$a + 0 = a \quad ; \quad a \cdot 1 = a$$

A_4 : Complementación.

Para todo elemento a de A existe otro elemento a' tal que

$$a + a' = 1 \quad ; \quad a \cdot a' = 0$$

Partiendo de estos axiomas, demostrar los siguientes teoremas :

1) $a + a = a$
2) $a \cdot a = a$
3) $a + 1 = 1$
4) $a \cdot 0 = 0$
5) $a + (a \cdot b) = a$
6) $a \cdot (a + b) = a$

NOTA : En vez de 0 y 1 se emplea también los símbolos $\emptyset$ y I.

SOLUCION :

1)
$$\begin{aligned} a + a &= (a + a) \cdot 1 \\ &= (a + a) \cdot (a + a') \\ &= a + (a \cdot a') \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} a \cdot a &= (a \cdot a) + 0 && \text{, por } A_3 \\ &= (a \cdot a) + (a \cdot a') && \text{, por } A_4 \\ &= a \cdot (a + a') && \text{, por } A_2 \\ &= a \cdot 1 && \text{, por } A_4 \\ &= a && \text{, por } A_3 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} a + 1 &= (a + 1) \cdot 1 \\ &= 1 \cdot (a + 1) \\ &= (a + a') \cdot (a + 1) \\ &= a + (a' \cdot 1) \\ &= a + a' \\ &= 1 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= (a \cdot 0) + 0 && \text{, por } A_3 \\ &= 0 + (a \cdot 0) && \text{, por } A_1 \\ &= (a \cdot a') + (a \cdot 0) && \text{, por } A_4 \\ &= a \cdot (a' + 0) && \text{, por } A_2 \\ &= a \cdot a' && \text{, por } A_3 \\ &= 0 && \text{, por } A_4 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} a + (a \cdot b) &= (a \cdot 1) + (a \cdot b) \\ &= a \cdot (1 + b) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} a \cdot (a + b) &= (a + 0) \cdot (a + b) && \text{, por } A_3 \\ &= a + (0 \cdot b) && \text{, por } A_2 \\ &= a + 0 && \text{, por 4)} \\ &= a && \text{, por } A_3 \end{aligned}$$

3.2. Sea A un álgebra de Boole, demostrar que :

1) $a \cdot b = 0$ implica $a \cdot (b + c) = a \cdot c$

2) $a \cdot b = 0$ implica $a \cdot b' = a$

3) $a \cdot b = 0$ y $a + b = c$ implica $a = c \cdot b'$

SOLUCION :

1) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, propiedad distributiva

$= 0 + (a \cdot c)$, $a \cdot b = 0$

$= a \cdot c$

2) $a = a \cdot 1$, propiedad del elemento 1,

$= a \cdot (b + b')$, b y b' conjuntos complementarios,

$= (a \cdot b) + (a \cdot b')$, propiedad distributiva ,

$= 0 + (a \cdot b')$, $a \cdot b = 0$

$= a \cdot b'$

3) $c \cdot b' = (a + b) \cdot b'$, ya que $a + b = c$

$= (a \cdot b') + (b \cdot b')$, propiedad distributiva,

$= (a \cdot b') + 0$, ya que b y b' son complementarios,

$= a \cdot b'$

$= a$, por 2)

---oooOooo---

3.3. Poner los ejemplos de Algebras de Boole que se han estudiado este curso con las operaciones correspondientes y los elementos cero y unidad. *(SELECTIVIDAD -1976)*

SOLUCION :

1) Algebra de Boole de las partes de un conjunto.
   Operaciones : Unión , Intersección , complementación.
   Elementos cero y unidad : $\emptyset$ y U

2) Algebra de Boole de las proposiciones.
   Operaciones : Disyunción , conjunción , negación
   Elementos cero y unidad : La contradicción y tautología

3) Algebra de Boole de los circuitos.
   Operaciones : suma (asociación en paralelo) ,producto (serie) , contrario
   Elementos cero y unidad : Circuito siempre cerrado, circuito siempre abierto.

4) Algebra de Boole de los sucesos.
   Operaciones : Unión , intersección , contrario,
   Elementos cero y unidad : Suceso imposible , suceso cierto.

3.4. Sea A^2 el conjunto formado por todos los puntos del plano. Se definen en él dos operaciones dadas por :

Suma + : P + Q = punto más alejado del origen entre P y Q

Producto . : P.Q = punto más cercano al origen entre P y Q .

Si P es un punto, P' se define como el punto simétrico respecto del origen.

¿Es A^2 con estas operaciones un Algebra de Boole?.

SOLUCION :

A^2 con estas operaciones no es un álgebra de Boole. En efecto , si fuese un álgebra de Boole la operación producto "." tendría que tener elemento unidad, es decir, tendría que existir un punto X tal que para todo punto P del plano se verificaría que P.X = P. Esto implica que : Todo punto del plano está más próximo al origen que el punto X".

Este punto no existe evidentemente.

---oooOooo---

3.5. Se considera el conjunto

$$D = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$$

en el que se definen las siguientes operaciones :

Suma + : a + b = mínimo común múltiplo de a y b

Producto .: a . b = máximo común divisor de a y b

Si a es un número , se define a' como el número tal que a.a' = 60

¿Es el conjunto D con estas operaciones un álgebra de Boole?.

SOLUCION :

Los elementos de D son los divisores de 60.

Evidentemente las operaciones suma y producto definidas son internas.

a) M.C.D(a,b) = M.C.D(b,a) y M.C.M.(a,b) = M.C.M.(b,a) , luego se cumplen las propiedades conmutativas.

b) Se comprueba también fácilmente que se verifican las propiedades distributivas.

c) El elemento cero del Algebra de Boole es 1; el elemento unidad 60.

d) Veamos que no se verifican las leyes de complementación.

En efecto : El complementario de 6 es 10. Entonces se verificaría :

a + a' = 60 y en nuestro caso M.C.M.(6,10) = 30

a . a' = 1 y en nuestro caso M.C.D.(6,10) = 2

Por tanto, D con las operaciones dadas no es un álgebra de BOOLE.

3.6. Demostrar que en un álgebra de Boole A, el complementario de un elemento es único.

SOLUCION;

Sean $+$, $.$, $'$ las operaciones y complementación definidas en A.
Sea x un elemento de A y sean x' y x'' dos complementarios de x, entonces,

$$x'' = 1.x'' = (x' + x) . x'' = (x'.x'') + (x.x'') = (x'.x'') + \emptyset = x' . x''$$

$$x' = 1.x' = (x + x'') . x' = (x.x') + (x''.x') = \emptyset + (x'' . x') = x''.x'$$

De las dos relaciones anteriores y de la conmutatividad de las operaciones de un álgebra de Boole, se sigue:

$$x' = x'' . x' = x''$$

---ooo0ooo---

3.7. Demostrar que en un álgebra de Boole se verifica que $(x')' = x$, siendo $'$ la complementación definida en el álgebra de Boole.

SOLUCION:

$$\text{De} \quad \left.\begin{matrix} x + x' = 1 \\ x . x' = \emptyset \end{matrix}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{matrix} (x')' + x' = 1 \\ (x')' . x' = \emptyset \end{matrix}\right\}$$

dado que el complementario en un algebra de Boole es único, se sigue que

$$(x')' = x$$

---ooo0ooo---

3.8. Demostrar que las relaciones siguientes son equivalentes

a) $a + b = b$

b) $a . b = a$

SOLUCION:

a) $\Rightarrow$ b)

$a . b = a . (a + b)$	por hipótesis ya que $a + b = b$
$= a$	por la propiedad simplificativa

b) $\Rightarrow$ a)

$a + b = (a . b) + b$	por hipótesis ya que $a . b = a$
$= b$	por la propiedad simplificativa.

3.9. Sea el conjunto $A = \{a,b\}$ con las operaciones + y . definidas por las siguientes tablas :

+	a	b
a	a	b
b	b	a

.	a	b
a	a	a
b	a	b

¿Es un álgebra de Boole $(A,+,.)$?.

S O L U C I O N :

a) La suma es conmutativa como se puede comprobar en la tabla.

b) Veamos si se verifica la propiedad $a.(b + c) = a.b + a.b$

Las posibilidades son las siguientes :

1) $a.(b+a) = a.b + a.a \iff a.b = a + a \iff a = a$

2) $a.(b+b) = a.b + a.b \iff a.a = a + a \iff a = a$

3) $b.(b+a) = a.b + b.a \iff b.b = a + a \iff a = a$

4) $b.(b+b) = b.b + b.b \iff b.a = b + b \iff a = a$

5) $a.(a+a) = a.a + a.a \iff a.a = a + a \iff a = a$

6) $b.(a+a) = b.a + b.a \iff b.a = a + a \iff a = a$

7) $a.(a+b) = a.a + a.b$ es el mismo caso que 1) por la conmutatividad.

8) $b.(a+b) = b.a + b.b$ por la conmutatividad se reduce al caso 3)

Veamos ahora si se verifica la propiedad $a + (b.c) = (a+b).(a+c)$

Las posibilidades son las siguientes :

1) $a+(b.a) = (a+b).(a+a) \iff a + a = b.a \iff a = a$

2) $a+(b.b) = (a+b).(a+b) \iff a + b = b.b \iff b = b$

3) $b+(b.a) = (b+b).(a+a) \not\Leftrightarrow b + a = b.a \not\Leftrightarrow b \neq a$,

luego la propiedad distributiva no se verifica para este caso y en consecuencia $(A ,+,.)$ no es un álgebra de Boole.

---oooOooo---

3.10. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes :

a) $a.b' = 0$; b) $a + b = b$; c) $a' + b = 1$

S O L U C I O N :

a) $\Rightarrow$ b)

$a + b = (a + b).1 = (a + b).(b + b') = (b + a).(b + b') = b+(a.b') = b + 0 = 0$

b) $\Rightarrow$ c)

$a' + b = a' + (a + b) = (a' + a) + b = 1 + b = 1$

c) $\Rightarrow$ a)

$a' + b = 1 \Rightarrow (a' + b)' = 1' \Rightarrow a' . b' = 0 \Rightarrow a . b' = 0$

3.11. Sea A un álgebra de Boole. Simplificar la siguiente expresión:

$$(((a.b).c) + ((a.b).c')) + (a'.b)$$

SOLUCION :

$$\begin{aligned}(((a.b).c) + ((a.b).c')) + (a'.b) &\overset{(1)}{=} ((a.b).(c + c')) + (a'.b)\\ &\overset{(2)}{=} ((a.b).1) + (a'.b)\\ &\overset{(3)}{=} (a.b) + (a'.b)\\ &\overset{(4)}{=} (a + a').b\\ &\overset{(5)}{=} 1.b\\ &\overset{(6)}{=} b\end{aligned}$$

donde en (1) y (4) se aplica la propiedad distributiva ; en (3) y (6) la propiedad del elemento 1 ; en (2) y (5) la propiedad de complementación.

---oooOooo---

3.12. Sea A un álgebra de Boole. Demostrar las siguientes relaciones:

a) $(a.b) + (a.b') + (a'.b) + (a'.b') = 1$

b) $(a.b) . (a.b') . (a'.b) . (a'.b') = 0$

SOLUCION :

a) $$\begin{aligned}(a.b)+(a.b')+(a'.b)+(a'.b') &\overset{(1)}{=} ((a.b)+(a.b')) + ((a'.b)+(a'.b'))\\ &\overset{(2)}{=} (a.(b + b')) + (a'.(b + b')\\ &\overset{(3)}{=} (a + a').(b + b')\\ &= 1 . 1 = 1\end{aligned}$$

donde en (1),(2) y (3) se ha aplicado la propiedad distributiva.

b) Para demostrar b) basta ver que el producto de dos factores cualesquiera es 0.

$$\begin{aligned}(a.b).(a.b') &= a.(b.a).b' &&\text{, por la propiedad asociativa}\\ &= a.(a.b).b' &&\text{, por la propiedad conmutativa}\\ &= (a.a).(b.b') &&\text{, por la propiedad asociativa}\\ &= a . 0 &&\text{, por la idempotencia y complementación}\\ &= a\end{aligned}$$

c) *De una manera análoga se puede demostrar para dos productos cualesquiera. En la teoría de conjuntos los productos son conjuntos disjuntos dos a dos.*

Hágase una interpretación en un diagrama de Venn de a) y b)

3.13. Sea A un álgebra de Boole. Simplificar la siguiente expresión :

$$(a.b) + (a'.b) + (a.b') + (a'.b')$$

Interpretar en el álgebra de Boole de las partes de un conjunto E el resultado anterior.

SOLUCION :

1) $(a.b) + (a'.b) + (a.b') + (a'.b') \overset{(1)}{=} ((a.b)+(a'.b)) + ((a.b')+(a'.b'))$

$$\overset{(2)}{=} ((a+a').b) + (a+a').b')$$

$$\overset{(3)}{=} 1.b + 1.b'$$

$$\overset{(4)}{=} b + b'$$

$$\overset{(5)}{=} 1$$

donde en (1) se aplica la propiedad asociativa; (2) propiedad distributiva ; (3) propiedad de la complementación , lo mismo que en (5) ; y en (4) la propiedad del elemento 1.

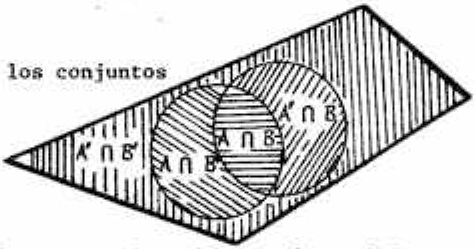
2) En la siguiente figura se dibujan los conjuntos

$A \cap B$, parte rayada ≡

$A' \cap B$, parte rayada ////

$A \cap B'$, parte rayada \\\\

$A' \cap B'$, parte rayada ||||



Es evidente que la unión de estos conjuntos es el conjunto universal E.

3.14. Sea A un álgebra de Boole. Simplificar la siguiente expresión:

$$(a.(b.c')') + (((a'+b')+c)')$$

SOLUCION:

$(a.(b.c')') + (((a'+b')+c)') \overset{(1)}{=} (a.(b'+c)) + ((a'+b')' . c')$

$$\overset{(2)}{=} (a.(b'+c)) + ((a.b).c')$$

$$\overset{(3)}{=} (a.(b'+c)) + (a.(b.c'))$$

$$\overset{(4)}{=} a.((b'+c) + (b.c')$$

$$\overset{(5)}{=} a.((b.c')' + (b.c'))$$

$$\overset{(6)}{=} a.1$$

$$\overset{(7)}{=} a$$

donde en (1),(2),(5) se aplican las leyes de Morgan; (3) propiedad asociativa; (4) , propiedad distributiva ; (6) propiedad de la complementación ; y (7) la propiedad del elemento 1.

3.15. En un álgebra de Boole se define la siguiente operación

$$a \,\Delta\, b = (a \,.\, b') + (b \,.\, a')$$

Demostrar que :

1) $(a + c) \,\Delta\, (b + c) = (a \,\Delta\, b) \,.\, c'$

2) $a + c = b + c$ equivalente a $a \,\Delta\, b \leqslant c$

SOLUCION :

1)
$$\begin{aligned}(a + c) \,\Delta\, (b + c) &= ((a + c) \,.\, (b + c)') + ((b + c) \,.\, (a + c)') \\ &= ((a + c) \,.\, (b' + c') + ((b + c) \,.\, (a' + c') \\ &= (a \,.\, b' \,.\, c') + (c \,.\, b' \,.\, c') + (b \,.\, a' \,.\, c') + (c \,.\, a' \,.\, c') \\ &= (a \,.\, b' \,.\, c') + (b \,.\, a' \,.\, c') \\ &= ((a \,.\, b') + (b \,.\, a')) \,.\, c' \\ &= (a \,\Delta\, b) \,.\, c'\end{aligned}$$

Justifíquese cada uno de los pasos en esa cascada de igualdades.

2) Supongamos $a + c = b + c$

$$\begin{aligned}(a \,\Delta\, b) + c &= (a \,.\, b') + (b \,.\, a') + c \\ &= (a \,.\, b') + ((b + c) \,.\, (a' + c)) \\ &= (a \,.\, b') + ((a + c) \,.\, (a' + c)) && \text{, por hipótesis} \\ &= (a \,.\, b') + ((a \,.\, a') + c) \\ &= (a \,.\, b') + c \\ &= (a + c) \,.\, (b' + c) && \text{, propiedad distributiva} \\ &= (b + c) \,.\, (b' + c) && \text{, por hipótesis} \\ &= (b \,.\, b') + c \\ &= c\end{aligned}$$

entonces $a \,\Delta\, b \leqslant c$

Recíprocamente, si $a \,\Delta\, b \leqslant c$ entonces $(a \,\Delta\, b) \,.\, c' \leqslant c \,.\, c' = 0$, luego $(a \,\Delta\, b) \,.\, c' = 0$. Aplicando esto en 1) se obtiene : $(a + c) \,\Delta\, (b + c) = 0$ de donde se obtiene que $a + c = b + c$

La operación Δ se llama diferencia simétrica. Recuérdese la definición intuitiva de la teoría de conjuntos en un diagrama de Venn.

---oooOooo---

3.16. Demostrar las siguientes ecuaciones :

a) $a \,\Delta\, b = b \,\Delta\, a$, b) $a \,\Delta\, a = 0$, $a \,\Delta\, 0 = a$

SOLUCION :

a) $a \,\Delta\, b = (a.b') + (b.a') = (b.a') + (a.b') = b \,\Delta\, a$

b) $a \,\Delta\, a = (a.a') + (a.a') = 0 + 0 = 0$

c) $a \,\Delta\, 0 = (a.0') + (0.a') = a + 0 = a$

3.17. Se considera el álgebra de Boole de dos elementos $\{0,1\}$, con las siguientes tablas :

+	0	1
0	0	1
1	1	1

•	0	1
0	0	0
1	0	1

'	a	a'
	0	1
	1	0

y se define la operación :

$$a \,\Delta\, b = (a.b') + (b.a')$$

a) Hallar la tabla de esta operación llamada "*simétrica*"

b) Demostrar que se verifica la propiedad asociativa, es decir,

$$a \,\Delta\, (b \,\Delta\, c) = (a \,\Delta\, b) \,\Delta\, c$$

(SELECTIVIDAD-1975)

S O L U C I O N :

a) Tabla de $a \,\Delta\, b$ es la siguiente : como puede comprobarse según la definición.

	0	1
0	0	1
1	1	0

b)

a	Δ	(b	Δ	c)	=	(a	Δ	b)	Δ	c
1	1	1	0	1		1	0	1	1	1
1	0	1	1	0		1	0	1	0	0
1	0	0	1	1		1	1	0	0	1
1	1	0	0	0		1	1	0	1	0
0	0	1	0	1		0	1	1	0	1
0	1	1	1	0		0	1	1	1	0
0	1	0	1	1		0	0	0	1	1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0

Los resultados obtenidos en cada miembro son iguales.

---oooOooo---

3.18. Demostrar las siguientes ecuaciones del Algebra del Boole :

a) $a \,.\, (\bar{a} + b) = a \,.\, b$

b) $a + (\bar{a} \,.\, b) = a + b$

S O L U C I O N :

a) $a \,.\, (\bar{a} + b) = (a \,.\, \bar{a}) + (a \,.\, b)$, propiedad distributiva

$= 0 + (a \,.\, b)$, ley de complementación

$= a \,.\, b$, propiedad del cero

b) $a + (\bar{a} \,.\, b) = (a + \bar{a}) \,.\, (a + b)$, propiedad distributiva

$= 1 \,.\, (a + b)$, ley de complementación

$= a + b$, propiedad del uno.

3.19. Determinar la expresión representada pos los siguientes circuitos :

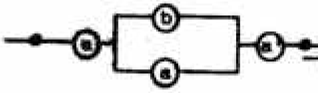


Fig.a

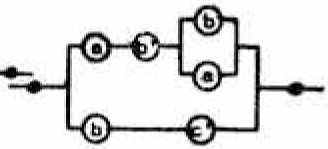


Fig.b

(*JRV-III-11*)

SOLUCION :

a) a . (a + b) . a'

b) (a . b' . (a + b)) + (b . c')

Nótese que el + corresponde a los interruptores en paralelo y el . corresponde a los interruptores en serie.

---oooOooo---

3.20. Construir el circuito correspondiente a las siguientes expresiones :

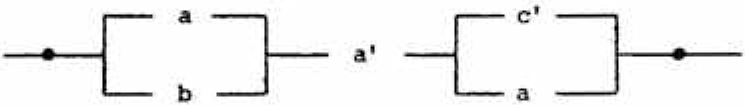
1°) (a + b) . (a' . (c' + a))

2°) (a . b) + (c' + (c . b))

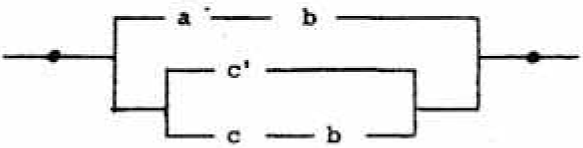
(*JRV-III-12*)

SOLUCION :

a)

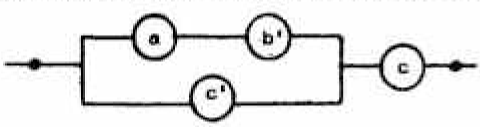


b)



---oooOooo---

3.21. Escribir la expresión representada por el siguiente circuito :



(*JRV-III-6*)

SOLUCION :

La expresión dada por el circuito es la siguiente :

((a . b') + c') . c

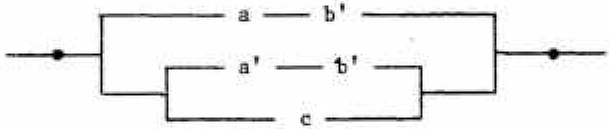
3.22. Representar gráficamente el circuito definido por la siguiente expresión :

$$(a \cdot b') + ((a' \cdot b') + c)$$

(*JRV-III-7*)

S O L U C I O N :

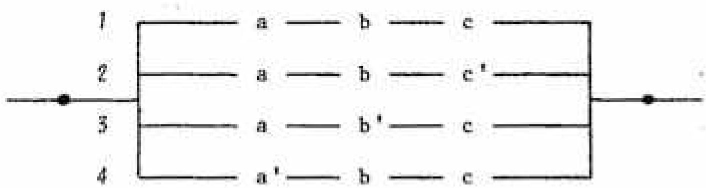
El circuito que determina gráficamente esta expresión es :



---oooOooo---

3.23. Un jurado está compuesto por tres miembros.Cada uno vota presionado un botón. Dibujar un esquema de un circuito en el que se encienda una bombilla cuando al menos dos miembros del jurado voten sí. (Razonar únicamente con los circuitos)

S O L U C I O N :



La expresión de este circuito es la siguiente :

$$(a.b.c) + (a.b.c') + (a.b'.c) + (a'.b.c)$$

Veamos que este circuito cumple las condiciones del enunciado.

a) Si los tres votan que sí la corriente pasa por el hilo 1

b) Si a y b votan que sí la corriente pasa por el hilo 2 , puesto que al votar c no ,c' es sí.

c) Si a y c votan que sí la corriente pasa por el hilo 3 , puesto que al votar b no , b' es sí.

d) Si b y c votan que sí la corriente pasa por el hilo 4 , puesto que al votar a no , a' es sí.

e) Cuando dos cualesquiera votan que no la corriente no pasa ni por 1 ya que hay dos interruptores abiertos, ni por los hilos restantes, por la misma razón.

f) Si no vota ninguno de los tres que sí es evidente que no pasa corriente por ninguno de los hilos.

3. 24. Demostrar mediante una tabla de respuesta la equivalencia de los siguientes circuitos :

a) (a + b) . a = a

b) (a . b) + a = a (JRV-III-13)

SOLUCION :

(a	+	b)	.	a	=	a
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

(a	.	b)	+	a	=	a
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*

Las columnas datos son : 1,3,5,7

- de las columnas 1 y 3 se obtiene la 2 ;
- de las columnas 2 y 5 se obtiene la 4 (resultado del primer miembro)
- de las columnas 4 y 7 se obtiene la 6 (resultado final).

Por tanto, se tiene una equivalencia entre circuitos.

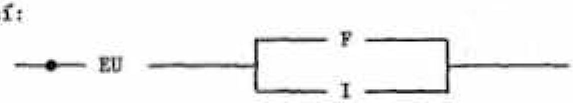
---oooOooo---

3.25. Se reunen los representantes de Estados Unidos, Inglaterra, Francia, Bélgica, Holanda y Dinamarca. Estados Unidos tiene derecho al veto, lo mismo que Inglaterra y Francia juntos y lo mismo que los tres restantes juntos. En los demás casos cualquier decisión que se tome es válida. Dibujar un esquema de un circuito en el que se encienda una bombilla al tomar una decisión.

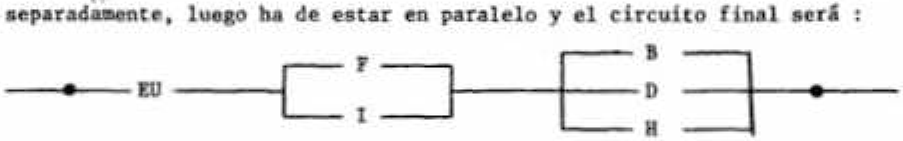
SOLUCION :

a) Estados Unidos tiene derecho al veto, luego el circuito será

b) Francia e Inglaterra tienen derecho al veto, pero juntamente, no cada uno de ellos, luego estarán en paralelo y el circuito anterior se completará así:



c) Bélgica. Dinamarca y Holanda también tienen derecho al veto pero juntas, no separadamente, luego ha de estar en paralelo y el circuito final será :



3. 26. Construir una tabla de respuesta para las siguientes equivalencias de circuitos :

a) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

b) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (JRV-III-15)

SOLUCION :

a)

a	.	(b	.	c)	=	(a	.	b)	.	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

b)

a	+	(b	+	c)	=	(a	+	b)	+	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

La obtención de las sucesivas columnas se hace como hemos visto en las tablas de lógica.

Las columnas 1,3,5,7,9,11 son las columnas de datos.

De las columnas 3 y 5 se obtiene la 4, y

de la 4 y 1 la columna 2 que es el resultado del primer miembro

De las columnas 7 y 9 se obtiene la 8 , y

de la 8 y 11 la columna 10 que es el resultado del segundo miembro.

De las columnas 2 y 10 (que son iguales) se obtiene finalmente la columna 6 que demuestra la equivalencia de los circuitos.

---oooOooo---

3.27. Construir la tabla de respuesta para la siguiente equivalencia de circuitos :

$$(a + b)' = a' \, . \, b'$$

[JRV-III-8]

S O L U C I O N :

a	b	a'	b'	a + b	(a + b)'	a'.b'	(a + b)' = a'.b'
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Se trata de una equivalencia de circuitos puesto que la columna de resultados es toda de unos.

---oooOooo---

3.28. Demostrar que $(a')' = a$

[JRV-III-9]

S O L U C I O N :

a	a'	(a')'	(a')' = a
1	0	1	1
0	1	0	1

---oooOooo---

3.29. Construir una tabla de respuesta para la siguiente equivalencia de circuitos:

$$a + (b \, . \, c) = (a + b) \, . \, (a + c)$$

[JRV-III-10]

S O L U C I O N :

a	+	(b	.	c)	=	(a	+	b)	.	(a	+	c)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

NOTA : Esta propiedad es la distributiva. De una manera análoga se demuestra la propiedad dual de esta:

$$a \, . \, (b + c) = (a.b) + (a.c)$$

3.30. Una máquina indicadora de mayoría de votos comprende tres interruptores, x, y, z, y una lámpara. La lámpara se enciende cuando se obtienen dos o más votos favorables. Dibújese el circuito de esta máquina, haciendo previamente la tabla de respuestas.

S O L U C I O N:

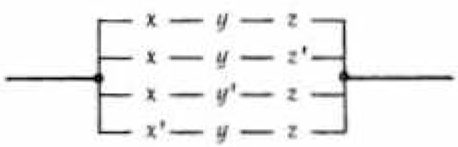
La siguiente tabla indica o muestra las diferentes posibilidades de la votación

x	y	z	lámpara = L	
1	1	1	1	$x.y.z$
1	1	0	1	$x.y.z'$
1	0	1	1	$x.y'.z$
1	0	0	0	
0	1	1	1	$x'.y.z$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

La función booleana viene dada por :

$$L = x.y.z + x.y.z' + x.y'.z + x'.y.z$$

Y el circuito es el siguiente :



---oooOooo---

3.31. Construye un circuito equivalente al siguiente dado en la figura a. [JRV-III-14]

S O L U C I O N :

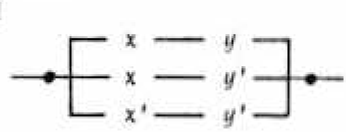


fig.a

La función del circuito es :

$$\begin{aligned} B = x.y + x.y' + x'.y' &= x.(y + y') + x'.y' \\ &= x.1 + x'.y' \\ &= x + x'.y' \\ &= (x + x').(x + y') \\ &= 1.(x + y') \\ &= x + y' \end{aligned}$$

fig.b

El circuito simplificado está dado en la figura b.

3.32. En un cohete hay tres hombres cada uno con un interruptor. Se enciende una luz roja cuando uno cualquiera de ellos señala peligro, y se enciende una luz verde cuando los tres señalan que se puede seguir la maniobra.
Dibújense los circuitos.

S O L U C I O N :

Si x,y,z son los interruptores y R la luz roja y V la luz verde, entonces se tiene la siguiente tabla en la que se muestran las diferentes posibilidades y sus resultados.

1 : peligro
0 : adelante

x	y	z	R	V
1	1	1	1	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	1

La función booleana de R (luz roja) viene dada por :

$$R = x.y.z + x.y.x' + x.y'.z + x'.y.z + x.y'.z' + x'.y.z' + x'.y'.z$$
$$= (x'.y'.z')'$$
$$= x + y + z$$

La función booleana de V (luz verde) viene dada por :

$$V = x'.y'.z'$$

Nótese que las funciones dadas por R y V son complementarias.

El circuito de la función R es :

El circuito de la función V es :

---ooo0ooo---

3.33. Escribir los números 12, 57, 423 en el sistema binario.

(JRV-III-1)

SOLUCION :

$$\begin{array}{llll}
12 & \underline{\lfloor 2} & & \\
0 & 6 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & 0 & 3 & \underline{\lfloor 2} \\
 & & 1 & 1
\end{array}$$

Por tanto, $12 = 1\,1\,0\,0_{(2}$

$$\begin{array}{llllll}
57 & \underline{\lfloor 2} & & & & \\
1 & 28 & \underline{\lfloor 2} & & & \\
 & 0 & 14 & \underline{\lfloor 2} & & \\
 & & 0 & 7 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & & & 1 & 3 & \underline{\lfloor 2} \\
 & & & & 1 & 1
\end{array}$$

Por tanto , $57 = 1\,1\,1\,0\,0\,1_{(2}$

$$\begin{array}{llllllllll}
423 & \underline{\lfloor 2} & & & & & & & & \\
1 & 211 & \underline{\lfloor 2} & & & & & & & \\
 & 1 & 105 & \underline{\lfloor 2} & & & & & & \\
 & & 1 & 52 & \underline{\lfloor 2} & & & & & \\
 & & & 0 & 26 & \underline{\lfloor 2} & & & & \\
 & & & & 0 & 13 & \underline{\lfloor 2} & & & \\
 & & & & & 1 & 6 & \underline{\lfloor 2} & & \\
 & & & & & & 0 & 3 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & & & & & & & 1 & 1 &
\end{array}$$

Por tanto, $423 = 110100111_{(2}$

---oooOooo---

3.34. Dados los números 1 0 0 0 1 0 1 y 1 0 0 0 1 escritos en el sistema binario, pasarlos al sistema decimal.

(JRV-III-2)

SOLUCION :

$1\,0\,0\,0\,1\,0\,1_{(2} = 1.2^6 + 1.2^2 + 1 = 64 + 4 + 1 = 69$

$1\,0\,0\,0\,1_{(2} = 1.2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$

También se puede aplicar la regla de Ruffini. Veamos cómo se hace para el primer número :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & & 2 & 4 & 8 & 16 & 34 & 68 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 8 & 17 & 34 & \underline{\lfloor 69}
\end{array}$$

3.35. Efectuar las siguientes sumas en el sistema binario:

$$\begin{array}{r} 1010001 \\ +\ 1111101 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ +\ 111011 \\ \hline \end{array}$$

[JRV-III-3]

SOLUCION:

$$\begin{array}{r} 1010001 \\ +\ 1111101 \\ \hline 11001110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1101 \\ +\ 111011 \\ \hline 1001000 \end{array}$$

---oooOooo---

3.36. Efectuar la operación siguiente operación en base dos :

$$\begin{array}{r} 1101111 \\ -\ 110001 \\ \hline \end{array}$$

[JRV-III-4]

SOLUCION:

$$\begin{array}{r} 1101111 \\ -\ 110001 \\ \hline 111110 \end{array}$$

---oooOooo---

3.37. Efectuar el siguiente producto en el sistema binario:

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ 1101 \\ \hline \end{array}$$

[JRV-III-5]

SOLUCION:

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\ 1101 \\ \hline 11011 \\ 110110 \\ 11011 \\ \hline 101011111 \end{array}$$

---oooOooo---

3.38. Determínese el máximo número cuya representación de base 2 tiene cinco cifras.

(SELECTIVIDAD -1975- JRV-III-16)

SOLUCION:

Las cifras en el sistema binario o de base dos son : 0,1

El número mayor de cinco cifras en base dos será entonces : $11111_{(2}$

Se trata de expresar este número en base 10.

$$\begin{aligned} 11111_{(2} &= 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 \\ &= 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \\ &= 31 \end{aligned}$$

---oooOooo---

3.39. Se desea obtener una colección de pesas distintas tales que con ellas se pueda pesar cualquier cantidad exacta de kilos de 1 a 15. Hallar el número mínimo de pesas que deben adquirise e indicar cuáles son.

SOLUCION:

Como las pesas han de ser distintas, basta expresar el número 15 en sistema binario .

$15 = 1111_{(2}$

Por tanto, se necesita una pesa de 8 kilos , otra de 4 ,otra de 2 y otra de 1

El número de pesas para cada uno de los kilos de 1 a 15 viene expresado en el siguiente cuadro:

PESAS DE

	8 kg	4 kg	2 kg	1 kg
1				1
2			1	0
3			1	1
4		1	0	0
5		1	0	1
6		1	1	0
7		1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

4 APLICACIONES

en el que se desarrollan las siguientes materias:

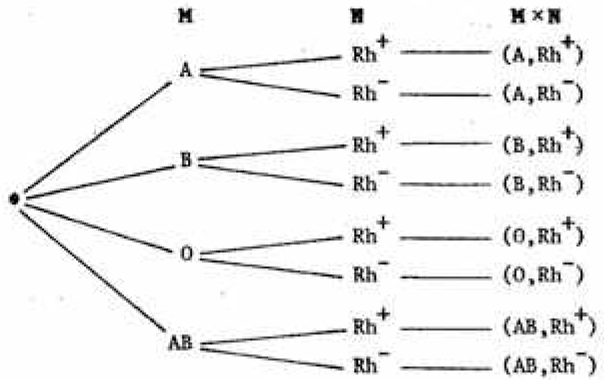
1. PRODUCTO CARTESIANO
2. PROPIEDADES
3. CORRESPONDENCIAS
4. APLICACIONES
5. TIPOS DE APLICACIONES
6. CARDINAL DE UN CONJUNTO
7. CARDINALES DE CONJUNTOS FINITOS
8. CARDINAL DE LA UNION DE CONJUNTOS

4.1. Consideremos el conjunto M formado por los grupos sanguíneos, es decir, $M = \{A, B, O, AB\}$, y sea $N = \{Rh^+, Rh^-\}$. Calcular los distintos grupos de sangre que se pueden formar.

[JRV-IV-2]

SOLUCION :

Los distintos grupos de sangre vienen dados por los elementos del producto cartesiano $M \times N$. El siguiente diagrama en árbol nos da los diferentes grupos de sangre y su número :



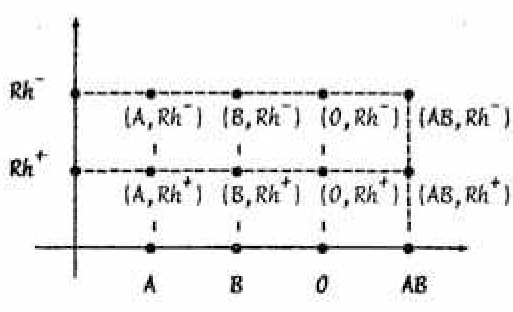
El número de grupos de sangre es 8.

---oooOooo---

4.2. Representar gráficamente los elementos del producto cartesiano del ejercicio anterior .

[JRV-IV-5]

SOLUCION :



Los puntos del diagrama cartesiano vienen dados por la intersección de

- rectas paralelas por los puntos del conjunto M a la recta que contiene los puntos del conjunto N

- rectas paralelas por los puntos del conjunto N a la recta que contiene los puntos del conjunto M.

4.3. Demostrar que si A' y B' son dos conjuntos no vacíos, la relación $A' \times B' \subset A \times B$ es equivalente a $A' \subset A$ y $B' \subset B$

[JRV-IV-8]

SOLUCION:

a) La relación $(a,b) \in A' \times B' \Rightarrow a \in A'$ y $b \in B'$

$\Rightarrow a \in A$ y $b \in B$ por estar $A' \subset A$ y $B' \subset B$

$\Rightarrow (a,b) \in A \times B$

Por tanto $A' \subset A$ y $B' \subset B$ implica que $A' \times B' \subset A \times B$

b) Recíprocamente:

1) Sea x un elemento de A', puesto que B' es un conjunto no vacío, existe un elemento $y \in B'$ tal que $(x,y) \in A' \times B'$ de donde $(x,y) \in A \times B$ y por consiguiente $x \in A$ lo que demuestra que $A' \subset A$.

2) Sea y un elemento de B', puesto que A' es un conjunto no vacío, existe un $x \in A'$ tal que $(x,y) \in A' \times B'$ de donde $(x,y) \in A \times B$ y por consiguiente $y \in B$ lo que demuestra que $B' \subset B$

---oooOooo---

4.4. Demostrar que la relación $A \times B = \emptyset$ es equivalente a $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

SOLUCION:

En efecto, la relación $z \in A \times B$ implica que $pr_1(z) \in A$ y $pr_2(z) \in B$, luego $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.

Recíprocamente, la relación $x \in A$ y $x \in B$ implica la relación $(x,y) \in A \times B$, y por consiguiente $A \times B \neq \emptyset$.

Al ser las proposiones "$A \times B \neq \emptyset$" y "$A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$" equivalentes, lo mismo sucede con la negación de éstas, de donde se sigue el enunciado.

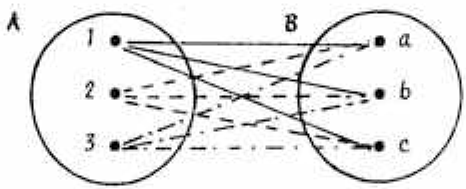
---oooOooo---

4.5. Representar en un diagrama de flechas el producto cartesiano de $A = \{1,2,3\}$ por $B = \{a,b,c\}$

SOLUCION:

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$

y su diagrama de flechas :



4. 6. Demostrar las siguientes propiedades del producto cartesiano :

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(JRV-IV-3)

SOLUCION :

a) Para demostrar esta igualdad tendremos que ver que se cumple la doble inclusión.

1) Veamos que $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$

$$\begin{aligned} (a,b) \in A \times (B \cup C) &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ b \in (B \cup C) \\ &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ (b \in B \ \text{ o } \ b \in C) \\ &\Rightarrow (a \in A \ \text{ y } \ b \in B) \text{ o } (a \in A \text{ y } b \in C) \\ &\Rightarrow (a,b) \in A \times B \ \text{ o } \ (a,b) \in A \times C \\ &\Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

2) Veamos ahora que $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$

$$\begin{aligned} (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C) &\Rightarrow (a,b) \in A \times B \ \text{ o } \ (a,b) \in A \times C \\ &\Rightarrow (a \in A \ \text{ y } b \in B) \text{ o } (a \in A \ \text{ y } \ b \in C) \\ &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ b \in B \cup C \\ &\Rightarrow (a,b) \in A \times (B \cup C) \end{aligned}$$

Luego de las dos inclusiones de 1) y 2) se deduce la propiedad a)

b) La demostración de esta propiedad es análoga a la anterior.

1) Veamos que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

$$\begin{aligned} (a,b) \in A \times (B \cap C) &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ b \in B \cap C \\ &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ (b \in B \ \text{ y } \ b \in C) \\ &\Rightarrow (a \in A \ \text{ y } \ b \in B) \text{ y } (a \in A \ \text{ y } \ b \in C) \\ &\Rightarrow (a,b) \in A \times B \ \text{ y } \ (a,b) \in A \times C \\ &\Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

2) Veamos ahora la otra inclusión,es decir,

$$(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$$

$$\begin{aligned} (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) &\Rightarrow (a,b) \in A \times B \ \text{ y } \ (a,b) \in A \times C \\ &\Rightarrow (a \in A \ \text{ y } \ b \in B) \text{ y } (a \in A \text{ y } b \in C) \\ &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } (b \in B \ \text{ y } \ b \in C) \\ &\Rightarrow a \in A \ \text{ y } \ b \in B \cap C \\ &\Rightarrow (a,b) \in A \times (B \cap C) \end{aligned}$$

Por tanto, de las inclusiones demostradas en los apartados 1) y 2) se tiene la igualdad de los conjuntos dados en b).

---oooOooo---

4. 7. Dados los conjuntos de palabras siguientes :
A = {Tormenta, coche, barco, crustáceo, Inglaterra, insecto, péndulo} y
B = {Rueda, ancla, reloj, relámpago, Londres, mosquito, centollo},
se pide establecer una correspondencia lógica entre los elementos de A y los de B.

(JRV-IV-9)

SOLUCION :

La correspondencia natural entre los conjuntos A y B viene dada por :

$$
\begin{array}{lcl}
A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\
\text{Tormenta} & \longrightarrow & \text{Relámpago} \\
\text{Coche} & \longrightarrow & \text{Rueda} \\
\text{Barco} & \longrightarrow & \text{Ancla} \\
\text{Crustáceo} & \longrightarrow & \text{Centollo} \\
\text{Inglaterra} & \longrightarrow & \text{Londres} \\
\text{Insecto} & \longrightarrow & \text{Mosquito} \\
\text{Péndulo} & \longrightarrow & \text{Reloj}
\end{array}
$$

---oooOooo---

4. 8. Defínase la correspondencia recíproca del ejercicio anterior.

(JRV-IV-10)

SOLUCION :

Si f es la correspondencia de A en B , entonces la correspondencia recíproca f^{-1} viene dada por :

$$
\begin{array}{lcl}
B & \xrightarrow{\quad f^{-1} \quad} & A \\
\text{Relámpago} & \longrightarrow & \text{Tormenta} \\
\text{Rueda} & \longrightarrow & \text{Coche} \\
\text{Ancla} & \longrightarrow & \text{Barco} \\
\text{Centollo} & \longrightarrow & \text{Crustáceo} \\
\text{Londres} & \longrightarrow & \text{Inglaterra} \\
\text{Mosquito} & \longrightarrow & \text{Insecto} \\
\text{Reloj} & \longrightarrow & \text{Péndulo}
\end{array}
$$

NOTA: *Tanto la correspondencia f como la correspondencia f^{-1} son*

a) Aplicaciones

b) Aplicaciones inyectivas

c) Aplicaciones suprayectivas , y por tanto

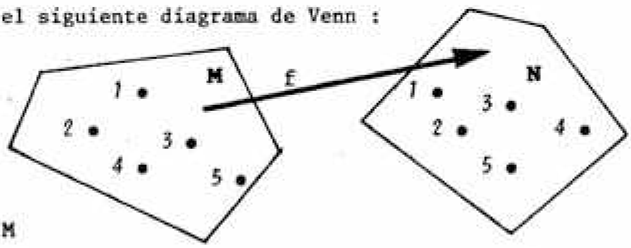
d) Aplicaciones biyectivas.

4.9. Sean $M = N = \{1,2,3,4,5\}$. Se define la correspondencia f que asigna a cada elemento su siguiente. Calcular :

1°) In(f)
2°) Fin(f)
3°) Or(f)
4°) Im(f)
5°) ¿Es f una aplicación?
6°) ¿Es f^{-1} una aplicación?.

SOLUCION : *(JRV-IV-13)*

Consideremos el siguiente diagrama de Venn :



1°) In(f) = M

2°) Fin(f) = N

3°) $Or(f) = \{1,2,3,4\}$, puesto que el número 5 no tiene imagen en N

4°) $Im(f) = \{2,3,4,5\}$, puesto que el número 1 no tiene original en M

5°) f no es una aplicación , puesto que $Or(f) \neq In(f)$

6°) f^{-1} tampoco es aplicación , ya que el número $1 \in N$ no tiene imagen en M.

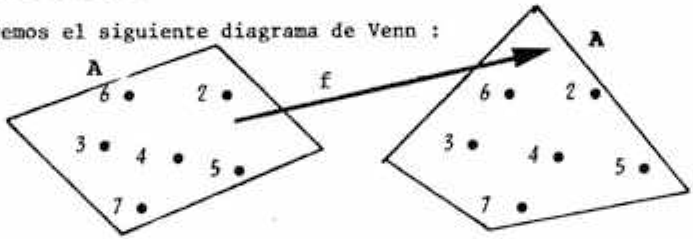
---oooOooo---

4.10. Sea el conjunto $A = \{2,3,4,5,6,7\}$. Definimos una correspondencia entre el conjunto A y si mismo, de manera que a cada número impar le hacemos corresponder el mismo y a cada número par le hacemos corresponder su mitad. Calcular :

1°) Or(f)
2°) Im(f)
3°) ¿Es la correspondencia f una aplicación ?.

SOLUCION : *(JRV-IV-15)*

Consideremos el siguiente diagrama de Venn :



1°) $Or(f) = \{3,4,5,6,7\}$ puesto que el número 2 no tiene imagen en A.

2°) $Im(f) = \{2,3,5,7\}$

3°) La correspondencia f no es una aplicación ya que $Or(f) \neq In(f)$. Nótese que el número 2 no tiene imagen.

4.11. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$. Se define la correspondencia f de la siguiente forma :

$$f = \{(1,a),(1,c),(2,b),(3,b),(3,c)\}$$

Calcular :

1°) In(f)

2°) Fin(f)

3°) Or(f)

4°) Im(f)

5°) f(1)

6°) f(5)

7°) $f^{-1}(a)$

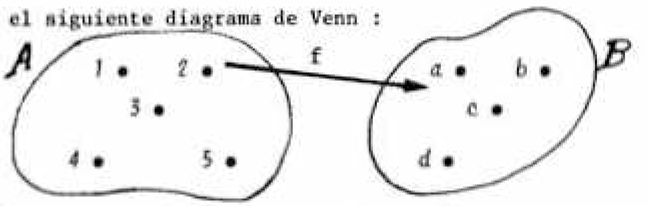
8°) $f^{-1}(d)$

9°). Se verifica 1 f a , 2 f a ?.

[*JRV-IV-14*]

S O L U C I O N :

Consideremos el siguiente diagrama de Venn :



La correspondencia f también se puede escribir así :

1 f a , 1 f c , 2 f b , 3 f b , 3 f c

o también, $f(1) = a$, $f(1) = c$, $f(2) = b$, $f(3) = b$, $f(3) = c$

1°) In(f) = A

2°) Fin(f) = B

3°) Or(f) = {1,2,3} . Nótese que el 1 no tiene ninguna imagen

4°) Im(f) = {a,b,c} . Nótese que d no tiene original.

5°) f(1) = {a , c}

6°) f(5) = ∅ , puesto que el 5 no tiene ninguna imagen.

7°) $f^{-1}(a) = \{1\}$

8°) $f^{-1}(d) = \emptyset$

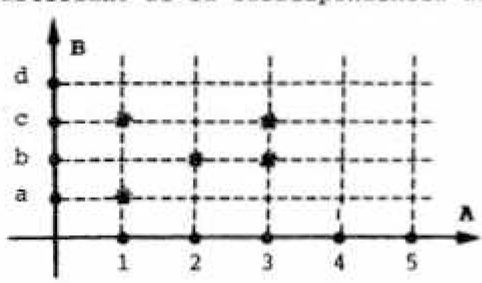
9°) 1 f a es cierta puesto que el 1 está relacionado con la a

2 f a es falsa puesto que el 2 no está relacionado con la a.

---oooOooo---

4.12. Dibuja un diagrama cartesiano de la correspondencia dada en el ejercicio anterior.

S O L U C I O N :



4.13. Poner un ejemplo de aplicación que sea inyectiva pero no suprayectiva

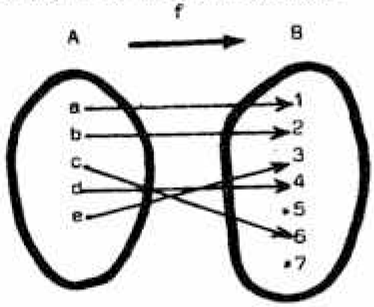
[JRV-IV-17]

SOLUCION:

a) La aplicación representada en el siguiente diagrama de Venn es una aplicación inyectiva pero no suprayectiva. Los números 5 y 7 no tienen original.

$A = \{a,b,c,d,e\}$

$B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$



b) La siguiente aplicación
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2$$

es inyectiva pero no suprayectiva.Solamente los cuadrados perfectos tienen original.

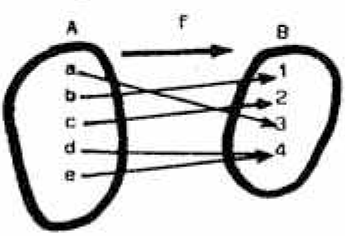
---oooOooo---

4.14. Poner un ejemplo de aplicación que sea suprayectiva pero no inyectiva.

[JRV-IV-18]

SOLUCION:

a) La aplicación representada en el siguiente diagrama de Venn es una aplicación suprayectiva pero no es inyectiva,puesto que d y e tienen la misma imagen en B , el número 4.



$A = \{a,b,c,d,e\}$

$B = \{1,2,3,4\}$

b) La aplicación
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2$$

es una aplicación suprayectiva pero no es inyectiva, puesto que

$$f(2) = f(-2) = 4$$

---oooOooo---

4.15. Definimos una correspondencia de A en B ,A y B conjuntos numéricos,tal que a cada elemento x le hacemos corresponder $3x^2 - 7$, es decir , $f(x) = 3x^2 - 7$.

Averiguar en cual de los siguientes casos es aplicación y de qué clase :

1°) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; 4°) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

2°) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$; 5°) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

3°) $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$; 6°) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

[*JRV-IV-16*]

S O L U C I O N :

1°) La correspondencia f no es una aplicación puesto que los números 0 y 1 no tienen imagen en $\mathbb{N}$. En efecto :

$f(0) = -7$ y $f(1) = -4$ y los números -7 y -4 no son naturales.

2°) La correspondencia f es una aplicación (simplemente).

a) La imagen de un número entero es un número entero y además único.

b) Esta aplicación no es inyectiva , ya que

$$f(-1) = f(1) = -4$$

c) No es suprayectiva. Supongamos que el número 0 fuese imagen de algún número, entonces

$$3x^2 - 7 = 0 \iff 3x^2 = 7 \iff x^2 = \frac{7}{3}$$

y $\frac{7}{3}$ no es cuadrado de ningún número entero.

3°) La correspondencia f es una aplicación

a) No es inyectiva ya que $f(1) = (-1)$

b) Tampoco es suprayectiva , puesto que el original del cero sería un número tal que $x^2 = \frac{7}{3}$ (Ver 2°) ,c)) y x en este caso tampoco es un número racional.

4°) La correspondencia f no es aplicación ya que $f(0) = -7$, número que no pertenece a los naturales.

5°) Aquí la correspondencia es una aplicación.

Esta aplicación es inyectiva pero no suprayectiva.Demuéstrese.

6°) f es aplicación.

a) No es inyectiva por las misma razón que en 2°).

b) Tampoco es suprayectiva , puesto que , por ejemplo el número -34 no tiene original en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$3x^2 - 7 = -34 \iff 3x^2 = -27 \iff x^2 = -9$$

y -9 no tiene raíz cuadrada en $\mathbb{R}$.

4.16. En el conjunto de todos los seres humanos vamos a establecer la siguiente correspondencia:

"A cada ser humano se le hace corresponder su madre"

¿Es aplicación?.

¿De qué clase?.

(JRV-IV-22)

SOLUCION:

Esta correspondencia es una aplicación,puesto que todo ser tiene una madre y solamente una, y esta es la condición de aplicación.

a) Esta aplicación NO es inyectiva ya que varios seres humanos pueden tener la misma madre como sucede realmente.

b) Esta aplicación tampoco es suprayectiva, puesto que los hombres (y mujeres no madres) no tienen original en esta aplicación.

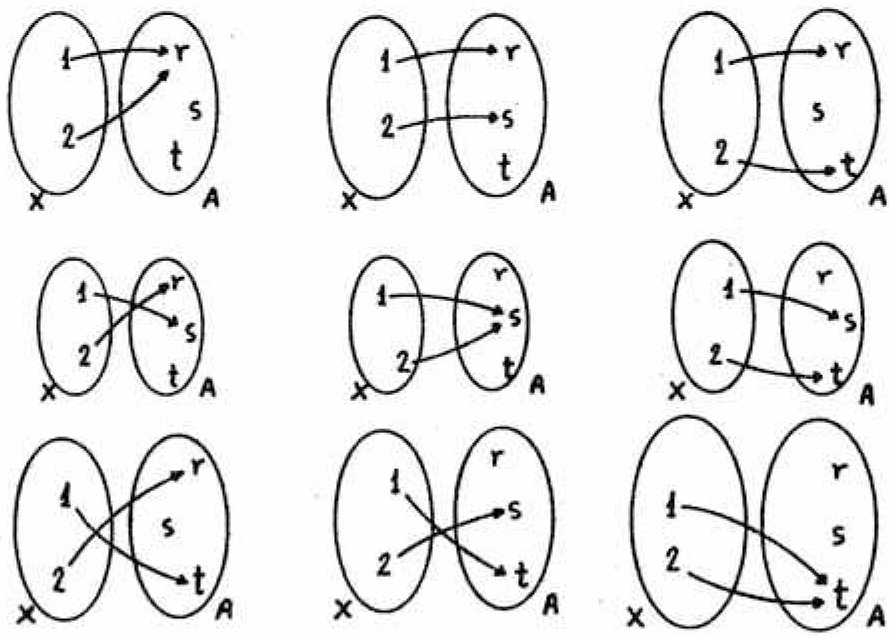
c) De a) y b) se sigue que tampoco es biyectiva.

---oooOooo---

4.17. Dados el conjunto X = {1,2} y el conjunto A = {r,s,t} formar todas las aplicaciones posibles de X en A.

SOLUCION:

Las distintas aplicaciones vienen expresadas en los siguientes diagramas de Venn.



4.18. Se define la correspondencia f del conjunto de los números enteros en el conjunto de los números naturales de la siguiente forma :

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{N}$$
$$x \longrightarrow f(x) = y = 4x$$

Se pide calcular :

1°) In(f)   4°) Im(f)

2°) Fin(f)   5°) ¿Es f una aplicación?

3°) Or(f)   6°) ¿Es f^{-1} una aplicación?.

[JRV-IV-12]

SOLUCION :

1°) El conjunto inicial de f es **Z** , es decir, In(f) = **Z**

2°) El conjunto final de f es **N** , es decir, Fin(f) = **N**

3°) El conjunto original de f es el conjunto de los elementos de **Z** tales que tienen imagen en **N**.

a) La imagen de un número negativo será negativa, ya que $y = (-4)x = -4x$ Por tanto, los números negativos de **Z** no tienen imagen en **N**.

b) La imagen de un número positivo es positivo, luego

$$Or(f) = \mathbf{Z}_+$$

es decir, el conjunto de los enteros positivos.

4°) $f(0) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$, ...

Luego, el conjunto imagen es :

$$Im(f) = \{0,4,8,12,16,20,24,28,\ldots\}$$
$$\{x \ / \ x \text{ es positivo y múltiplo de } 4\}$$

5°) f no es una aplicación puesto que $In(f) \neq Or(f)$

6°) f^{-1} no es aplicación , puesto que $Fin(f) \neq Im(f)$, y la igualdad es una condición necesaria.

---oooOooo---

4.19. Sobre el conjunto de los números enteros se define la siguiente correspondencia :

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x - 7}$$

¿Es f una aplicación?.

[JRV-IV-27]

SOLUCION :

f no es una aplicación ,puesto que $f(0) = \sqrt{0 - 7} = \sqrt{-7} \notin \mathbf{Z}$,es decir, el 0 no tiene imagen en **Z**.

Por tanto, f no cumple la condición de ser aplicación.

4.20. A cada provincia de España, se le hacen corresponder los municipios que la integran.

1°) Decir si esta correspondencia es una aplicación.

2°) Decir si la correspondencia recíproca es una aplicación.

3°) Calcular f^{-1}(Elche) , f^{-1}(Cartagena) , f^{-1}(Avilés) , siendo f la correspondencia dada.

(JRV-IV-21)

SOLUCION :

Sean $P = \{x \ / \ x$ es una provincia de España$\}$,

$M = \{x \ / \ x$ es un municipio$\}$,

$f : P \longrightarrow M$ la correspondencia dada.

1°) f no es una aplicación, ya que al tener la provincia varios municipios f no cumple la condición de aplicación.

2°) La correspondencia recíproca sí es aplicación, puesto que a cada municipio le corresponde un provincia y solamente una.

3°) f^{-1}(Elche) = Alicante , f^{-1}(Cartagena) = Murcia, f^{-1}(Avilés) = Asturias.

---oooOooo---

4.21. Sobre el conjunto de los números se define la siguiente correspondencia :

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1 - x}$$

¿Es una aplicación?.

(JRV-IV-24)

SOLUCION :

f no es una aplicación , puesto que no todo elemento de **R** tiene imagen.

Para x = 1 la correspondencia f no está definida, es decir, el 1 no tiene imagen en **R**.

---oooOooo---

4.22. Hallar la gráfica de la correspondencia dada en el ejercicio anterior.

(JRV-IV-25)

SOLUCION :

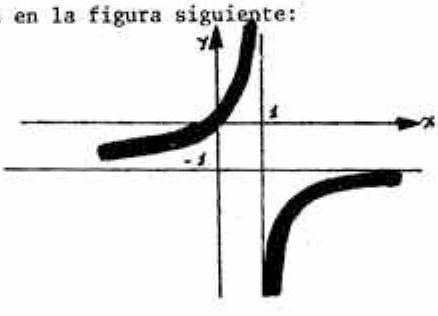
La gráfica de esta correspondencia viene dada en la figura siguiente:

En el eje OX se toman los valores de x.

En el eje OY se toman los valores de f(x).

El grafo es :

$$G = \{(x, f(x) / \ f(x) = \frac{x}{1 - x} \}$$



4.23. Analícese la correspondencia definida por la expresión $y = E(x)$, si x es un número real positivo y $E(x)$ es un número natural tal que $E(x) - 1 < x \leqslant E(x)$.

(SELECTIVIDAD -1975- JRV-IV-31)

SOLUCION :

Consideremos los siguientes segmentos de la recta :

$0 < x \leqslant 1$, entonces $y = E(x) = 1$

$1 < x \leqslant 2$, entonces $y = E(x) = 2$

$2 < x \leqslant 3$, entonces $y = E(x) = 3$

$3 < x \leqslant 4$, entonces $y = E(x) = 4$

... ...

$n < x \leqslant n+1$, entonces $y = E(x) = n+1$

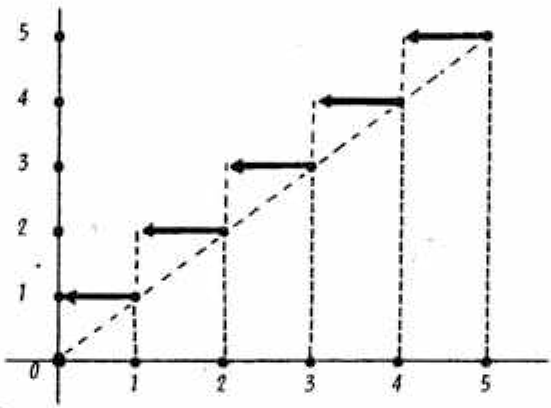
Por tanto,

a) A cada número real decimal y positivo le corresponde la parte entera más 1

b) A cada número natural le corresponde el mismo.

Se trata, pues, de una aplicación simplemente, puesto que no es inyectiva ni suprayectiva.

La representación de esta aplicación es la siguiente :



---oooOooo---

4.24. Se considera la siguiente aplicación de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, $y = 2x$

¿Es una aplicación biyectiva?

¿Cuál es la aplicación recíproca?.

SOLUCION :

Es una aplicación biyectiva ya que a) Es inyectiva , $f(x) = f(x') \Rightarrow 2x = 2x'$

$\Rightarrow x = x'$

b) Es suprayectiva, dado $y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$

Existe, por tanto, aplicación recíproca y es : $x = y/2$.

4.25. Sean $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{m,n,p,q\}$

a) Definir una aplicación de A en B que sea biyectiva.

b) Construir la aplicación recíproca f^{-1}.

c) Construir los grafos de f y f^{-1} y observar la simetría que existe, respecto de la bisectriz del primer cuadrante, entre ambas aplicaciones.

[JRV-IV-31]

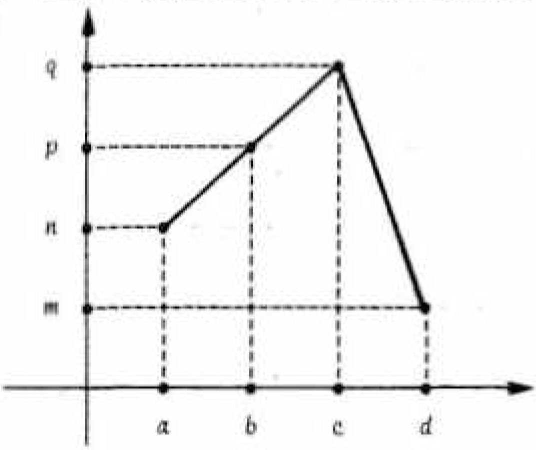
SOLUCION :

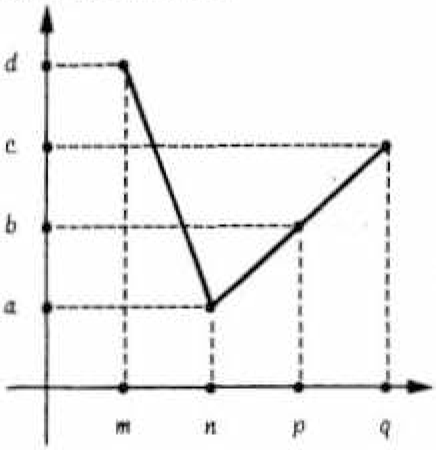
a) La aplicación dada por : $f(a) = n$, $f(b) = p$, $f(c) = q$, $f(d) = m$ es evidentemente una aplicación biyectiva.

b) La aplicación biyectiva recíproca es :

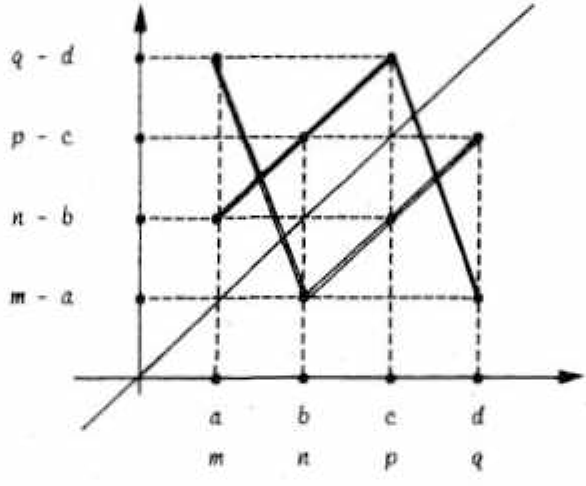
$$f^{-1}(m) = d \ , \ f^{-1}(n) = a \ , \ f^{-1}(p) = b \ , \ f^{-1}(q) = c$$

c) Veamos ahora cuáles son las gráficas de estas aplicaciones.





Si consideramos superpuestas las figuras se tiene la simetría pedida :



4.26. Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes, cuando existe una aplicación biyectiva que transforma un conjunto en otro. Pruébese que el conjunto de los números naturales es equipotente al de sus cuadrados perfectos.

(*JRV-IV-20*)

SOLUCION :

Sean $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,\ldots, n , \ldots\}$

$C = \{0,1,4,9,16,25,36,\ldots, n^2 , \ldots\}$

Se define una aplicación f de **N** en C de la siguiente manera:

$$f : \mathbf{N} \longrightarrow C$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2$$

a) f es una aplicación inyectiva . En efecto :

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$$ por ser números naturales.

b) f es suprayectiva. Es evidente que todo elemento de C tiene un original en **N** que es su raíz cuadrada.

De a) y b) se sigue que **N** y C son conjuntos biyectivos y por tanto, equipotentes.

NOTA : *Los conjuntos equipotentes a **N** o una parte de **N** se llaman conjuntos* **NUMERABLES**.

---oooOooo---

4.27. Se llama **sustitución** a toda aplicación biyectiva de un conjunto en si mismo. (*También se llaman* ***permutaciones***)
Escribir las sustituciones de conjunto A = {1,2,3}

(*JRV-IV-19*)

SOLUCION :

Las aplicaciones biyectivas de A en si mismo son las siguientes :

$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow A$	$A \longrightarrow A$
$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 1$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 3$	$1 \longrightarrow 3$
$2 \longrightarrow 2$	$2 \longrightarrow 3$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 3$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 2$
$3 \longrightarrow 3$	$3 \longrightarrow 2$	$3 \longrightarrow 3$	$3 \longrightarrow 1$	$3 \longrightarrow 2$	$3 \longrightarrow 1$

Siendo el conjunto inicial siempre el mismo , cada sustitución queda determinada cuando conocemos las imágenes de cada aplicación.

Por tanto, las sustituciones diferentes se pueden escribir así :

(1,2,3) , (1,3,2) , (2,1,3) , (2,3,1) , (3,1,2) , (3,2,1)

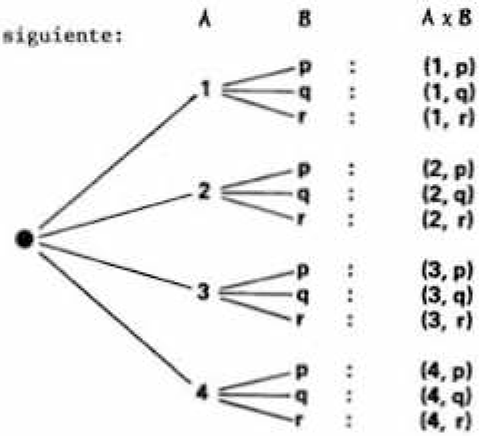
o también , cuando no hay lugar a confusión , :

123 , 132 , 213 , 231 , 312 , 321

4.28. Hallar el producto cartesiano, por medio de un diagrama en árbol, de los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{p,q,r\}$. ¿Cuántos elementos tiene?.

SOLUCION:

El diagrama en árbol es el siguiente:



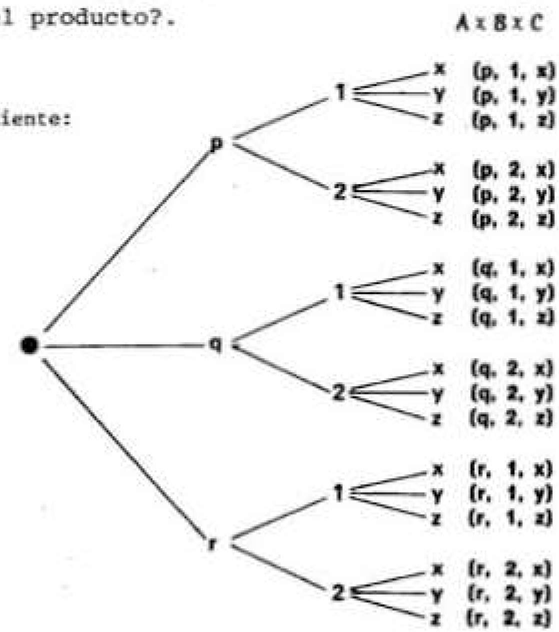
El número de elementos es : $Card(A \times B) = Card(A).Card(B) = 4.3 = 12$

---oooOooo---

4.29. Hallar el producto cartesiano, por medio de un diagrana en árbol, de los conjuntos $A = \{p,q,r\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{x,y,z\}$ ¿Cuántos elementos tiene el producto?.

SOLUCION:

El diagrama en árbol es el siguiente:



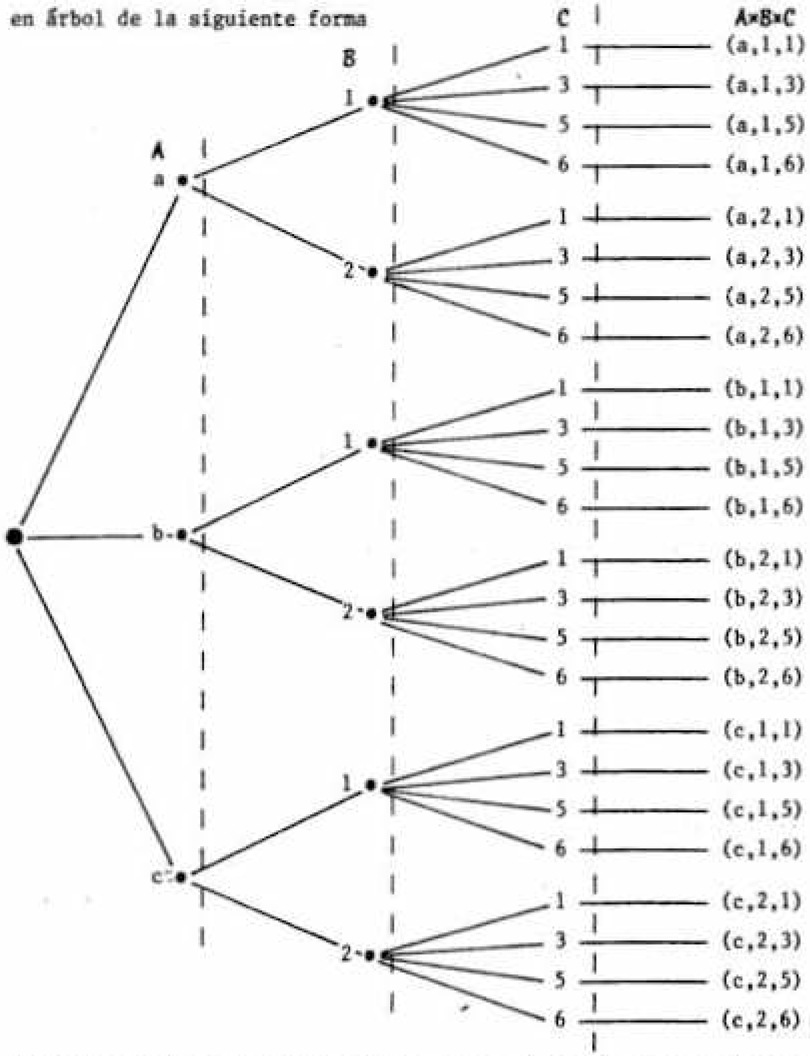
El número de elementos es : $Card(AxBxC) = Card(A)Card(B)Card(C) = 4.2.3 = 24$

4.30. Dados los conjuntos $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,3,5,6\}$ determínese el producto cartesiano $A \times B \times C$ y compruébese si el número de elementos de este conjunto es el producto de los números de elementos existentes en cada conjunto.

(*SELECTIVIDAD* - *1976*)

S O L U C I O N :

Para determinar el producto cartesiano $A \times B \times C$, vamos a dibujar un diagrama en árbol de la siguiente forma



El número de elementos del conjunto $A \times B \times C$ es 24, como se deduce del diagrama. Por tanto, se tiene

$$\mathrm{Card}(A \times B \times C) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) \times \mathrm{Card}(C) = 3.2.4 = 24$$

---oooOooo---

4.31. Averiguar de cuántas formas distintas se puede vestir un caballero que tiene en su armario 4 chaquetas , 3 pantalones y 2 pares de zapatos. (*JRV-IV-1*)

SOLUCION :

Si $\{C_1,C_2,C_3,C_4\}$ es el conjunto de las chaquetas,
$\{P_1,P_2,P_3\}$ es el conjunto de pantalones
$\{Z_1,Z_2\}$ es el conjunto de los zapatos , entonces el producto cartesiano de los tres conjuntos nos da las diferentes ternas que puede llevar y que son distintas. Por tanto,

Maneras de vestir $= \{C_1,C_2,C_3,C_4\} \times \{P_1,P_2,P_3\} \times \{Z_1,Z_2\}$

Número de maneras de vestir $= \text{Card}(\{C_1,C_2,C_3,C_3\})\text{Card}(\{P_1,P_2,P_3\})\text{Card}(\{Z_1,Z_2\})$

$$= 4 \,.\, 3 \,.\, 2 = 24$$

---oooOooo---

4.32. Si $\text{Card}(A) = n$ y $\text{Card}(B) = m$, calcular a que es igual $\text{Card}(A \times B)$. (*JRV-IV-4*)

SOLUCION :

Sean $A = \{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ y $B = \{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ dos conjuntos A y B cuyo cardinal es n y m respectivamente.

Entonces,

$$\begin{array}{lll} A \times B = \{(a_1,b_1),(a_1,b_2)\ ,\ \dots\ ,\ (a_1,b_m) & \longrightarrow & m \text{ elementos} \\ \qquad\qquad (a_2,b_1),(a_2,b_2)\ ,\ \dots\ ,\ (a_2,b_m) & \longrightarrow & m \text{ elementos} \\ \qquad\qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \overset{n)}{\dots} & \dots \\ \qquad\qquad (a_n,b_1),(a_n,b_2)\ ,\ \dots\ ,\ (a_n,b_m)\} & \longrightarrow & m \text{ elementos} \end{array}$$

y su cardinal , $\text{Card}(A \times B) = m + m + \overset{n)}{\dots} + m$, ya que hay n filas y cada fila tiene m elementos.

$$= n.m$$

---oooOooo---

4.33. Demostrar que $\text{Card}(A^n) = \text{Card}(A).\text{Card}(A). \;\dots\; .\text{Card}(A)$

$$= (\text{Card}(A))^n$$

SOLUCION :

Es consecuencia del ejercicio anterior , ya que

$\text{Card}(A^n) = \text{Card}(A \times A \times \dots \times A) = \text{Cadr}(A).\text{Card}(A). \;\dots\; \text{Card}(A) = (\text{Card}(A))^n$

4.34. Sean $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$ dos conjuntos. Determinar :

a) ¿Cuántas aplicaciones hay de A en B?.

b) ¿Cuántas aplicaciones inyectivas hay de A en B?.

(JRV-IV-28)

SOLUCION :

a) Una aplicación f de A en B queda determinada por la terna $\{f(a),f(b),f(c)\}$
Pero $\{f(a),f(b),f(c)\} \in B\times B\times B$, luego habra tantas aplicaciones cuantos elementos tenga el conjunto $B\times B\times B$.
Por otra parte ,

$$\mathrm{Card}(B\times B\times B) = \mathrm{Card}(B).\mathrm{Card}(B).\mathrm{Card}(B) = 4.4.4 = 64$$

Luego el número de aplicaciones es 64.

b) Veamos ahora el número de aplicaciones inyectivas de A en B.

1) La imagen de a , f(a) , puede ser cualquiera de los elemento 1,2,3,4
Luego, tiene 4 posibilidades.

2) La imagen de b , f(b) , puede ser cualquiera de los elementos 1,2,3,4 con la condición de que $f(a) \neq f(b)$, por ser f inyectiva.
Luego, f(b) tiene tres posibilidades

3) Finalmente, elegidas las imágenes f(a) y f(b), f(c) , tiene únicamente dos posibilidades, puesto que f es inyectiva.

Por tanto, el número de aplicaciones inyectivas es : $4.3.2 = 24$

---oooOooo---

4.35. Demostrar que si los conjuntos finitos A y B tienen m y n elementos respectivamente, entonces el número de aplicaciones de A en B es n^m, es decir,

$$\mathrm{Card}(A \longrightarrow B) = n^m$$

(JRV-IV-29)

SOLUCION :

Una aplicación aplicación f de A en B queda determinada por m-pla

$$(f(a_1),f(a_2),f(a_3), \ldots , f(a_m))$$

siendo $A = \{a_1,a_2,a_3, \ldots , a_m\}$
Pero $(f(a_1),f(a_2),f(a_3), \ldots , f(a_m)) \in B\times B\times B\times \overset{m)}{\ldots} \times B$, luego habra tantas aplicaciones cuantos elementos tenga el conjunto $B\times B\times B\times \overset{m)}{\ldots}\times B$
Por otra parte, $\mathrm{Card}(B \times B \times B \times \overset{m)}{\ldots} \times B) = (\mathrm{card}(B))^m = n^m$
de donde ,

$$\mathrm{Card}(A \longrightarrow B) = n^m .$$

---oooOooo---

4.36. Sea A un conjunto de m elementos y B un conjunto de n elementos. Determinar cuántas aplicaciones inyectivas se pueden definir de A en B.

[JRV-IV-29]

S O L U C I O N :

Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Nótese que si una aplicación es inyectiva entonces $m \leq n$.

1) La imagen de a_1 se puede elegir en B de n maneras distintas.
2) Elegida la imagen de a_1, la imagen de a_2 se puede elegir de $(n-1)$ maneras diferentes ya que $f(a_1) \neq f(a_2)$ siendo f la aplicación
3) Elegidas las imágenes de a_1, a_2, la imagen de a_3 se puede elegir de $(n-2)$ maneras diferentes.

... ...

Procediendo de la misma manera para los restantes elementos de A, se tiene finalmente :

n) Elegidas las imágenes de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, la imagen de a_n se puede tomar de $(n - m + 1)$ maneras distintas.

Por tanto :

Número de aplicaciones inyectivas de A en B $= n(n-1)(n-2). \ldots (n-m+1)$

---oooOooo---

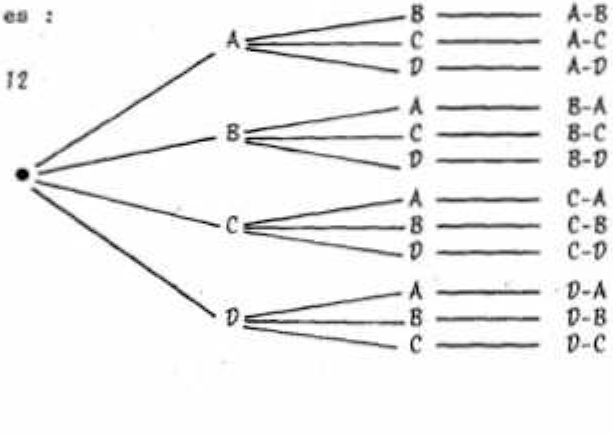
4.37. ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir dos premios distintos entre Abelardo, Basilio, Carmelo y David de modo que ninguno de ellos reciba los dos premios?.

S O L U C I O N :

El problema quedará resuelto si calculamos el número de aplicaciones inyectivas del conjunto de premios $P = \{p_1, p_2\}$ en el conjunto $Q = \{A, B, C, D\}$, donde hemos señalado las personas con las iniciales de los nombres.

El diagrama en árbol es :

Número de repartos = 12



4.38. Sea U un conjunto finito de cardinal n. Demostrar que el cardinal de $\mathcal{P}(U) = 2^n$.

S O L U C I O N :

La demostración de este teorema se puede hacer por varios caminos. Aquí se demuestra por tres métodos muy conocidos.

1) *METODO DE RECURRENCIA*

Si card(U) = 0, entonces $U = \emptyset$ y $\mathcal{P}(U) = \{\emptyset\}$. Por tanto card($\mathcal{P}$(U)) = $2^0 = 1$.

Si card(U) = 1, entonces $U = \{\emptyset\}$ y $\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, U\}$ y card($\mathcal{P}$(U)) = $2^1 = 2$

Supongamos que si card(U) = n-1 entonces card($\mathcal{P}$(U)) = 2^{n-1}. Sea ahora un conjunto U de card(U) = n , $x \in U$, U' el complementario de $\{x\}$ y $A \subset U$.

Si A no contiene a $\{x\}$, entonces A es una parte de U'

Si A contiene a $\{x\}$, $A - \{x\}$ es una parte de U

Si A y A' son dos partes de U conteniendo a $\{x\}$ tales que $A \neq A'$, entonces $A - \{x\} \neq A' - \{x\}$.

De aquí se deduce que ,

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathcal{P}(U)) &= 2.\text{card}(\ (U')) \\ &= 2.2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

2) *METODO DE LA FUNCION CARACTERISTICA*

Se trata de definir una biyección del conjunto $\mathcal{P}$(U) en $\mathcal{L}(U;\{0,1\})$ de las aplicaciones de U en $\{0,1\}$.

Las aplicaciones de U en $\{0,1\}$ se llaman funciones características.

Estas funciones se definen así :

A toda parte A de U se le asocia la función f_A de $\mathcal{L}(U;\{0,1\})$ (se llama entonces *función característica de A*) definida por:

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 & \text{si} \quad x \in A \\ f_A(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

La aplicación f de $\mathcal{P}$(U) en el conjunto $\mathcal{L}(U;\{0,1\})$ definida por $f(A) = f_A$ para todo elemento A de $\mathcal{P}$(U) es una biyección. (Hágase)

Se tiene,

$$\text{card}(\mathcal{P}(U)) = \text{card}(\ \mathcal{L}(U;\{0,1\})) = 2^n$$

ya que éste el número de aplicaciones de U en $\{0,1\}$.

3) *METODO DE NEWTON*

Los subconjuntos de U de 0 elementos son : $\emptyset$. Su número es $\binom{n}{0}$

El número de subconjuntos de 1 elemento es : $\binom{n}{1}$; de dos elementos : $\binom{n}{2}$ ... ,de n-1 será $\binom{n}{n-1}$ y finalmente de n será $\binom{n}{n}$.

Su suma es : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

Por tanto , card($\mathcal{P}$(U)) = 2^n

4.39. Se consideran los subconjuntos A y B del conjunto de referencia U finito. Demostrar que

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \qquad [1]$$

Aplicando la relación [1] demostrar que para tres subconjuntos A, B y C se verifica la relación

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) = {} & \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \\ & - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) \\ & + \text{Card}(A \cap B \cap C) \qquad [2]\end{aligned}$$

SOLUCION :

a) Demostración de la fórmula [1]

Dados los subconjuntos A y B de U sabemos que $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ son subconjuntos disjuntos como se ve también en el diagrama de Venn.

Por otra parte se tiene:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A - B) \cup (A \quad B) \cup (B - A) \\ A &= (A - B) \cup (A \quad B) \\ B &= (B - A) \cup (A \quad B) \end{aligned}$$

de donde, si consideramos sus cardinales, resulta :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A - B) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B - A) && [3] \\ \text{Card}(A) &= \text{Card}(A - B) + \text{Card}(A \cap B) && [4] \\ \text{Card}(B) &= \text{Card}(B - A) + \text{Card}(A \cap B) && [5] \end{aligned}$$

Sustituyendo en [3] los valores de $\text{Card}(A - B)$ y $\text{Card}(B - A)$ obtenidos de [4] y [5] resulta :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \quad B) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \end{aligned}$$

b) Demostración de la fórmula [2]

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \\ &\quad \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

---oooOooo---

NOTA : De manera análoga al ejercicio enterior se puede demostrar que para cuatro subconjuntos de U, A,B,C y D se cumple :

$$\begin{aligned} &\text{Card}(A \cup B \cup C \cup D) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) + \text{Card}(D) - \\ &\text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(A \cap D) - \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(B \cap D) \\ &- \text{Card}(C \cap D) + \text{Card}(A \cap B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap D) + \\ &+ \text{Card}(A \cap C \cap D) + \text{Card}(B \cap C \cap B) - \text{Card}(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

4.40. En una Universidad se supone que hay 4000 alumnos. De ellos 2300 matriculados en Matemáticas, 1700 en Economía, 1850 en Filosofía, 1200 en Matemáticas y en Economía, 715 en Matemáticas y Filosofía, 300 en Economía y Filosofía y 50 en las tres asignaturas. Los alumnos se pueden matricular de varias asignaturas a la vez, y de otras asignaturas distintas de las citadas.
Para confeccionar las fichas de las distintas asignaturas se desea saber :

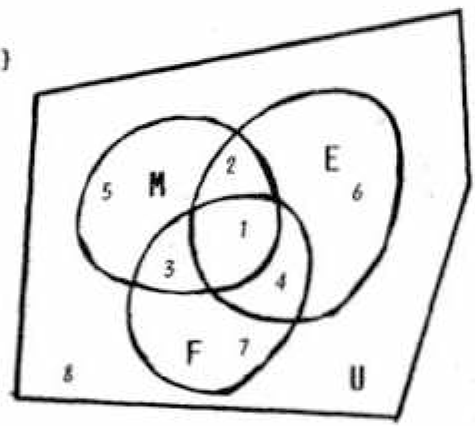
a) Cuántas hay que encargar entre Matemáticas y Economía.
b) Cuántas son necesarias para las tres asignaturas.
c) Cuántos alumnos hay que no les corresponda ninguna ficha de éstas asignaturas.
d) Cuántos alumnos hay que solo tengan ficha de Matemáticas.
e) Cuántos la tienen en una sola asignatura de las citadas.

(JRV-I-22)

SOLUCION :

Consideremos el diagrama adjunto.

M = {x/ x está matriculado en Matemáticas}
E = {x/ x está matriculado en Economía}
F = {x/ x está matriculado en Filosofía}
U = {x/ x está matriculado en la Universidad}



Antes de contestar a las preguntas vamos a calcular el cardinal de cada uno de los subconjuntos en que M, E y F dividen a U. En la figura están señaladas las 8 regiones que indican estos subconjuntos disjuntos.

1) Región 1 : Son los alumnos matriculados en las tres asignaturas y se tiene
$\text{Card}(M \cap E \cap F) = 50$

2) Región 2 : Alumnos matriculados solamente en Matemáticas y Economía ,
$1200 - 50 = 1150$

3) Región 3 : Alumnos matriculados solamente en Matemáticas y Filosofía ,
$715 - 50 = 665$

4) Región 4 : Alumnos matriculados solamente en Economía y Filosofía ,
$300 - 50 = 250$

5) Región 5 : Alumnos matriculados solamente en Matemáticas ,
$2300 - 665 - 1150 - 50 = 435$

6) Región 6 : Alumnos matriculados solamente en Economía ,
$1700 - 1150 - 50 - 250 = 250$

7) Región 7 : Alumnos matriculados solamente en Filosofía ,

$1850 - 665 - 50 - 250 = 885$

8) Región 8 : Alumnos matriculados en asignaturas distintas a las dadas ,

$4000 - 435 - 1150 - 50 - 665 - 250 - 250 - 885 = 315$

Con estos datos la contestación a las preguntas es inmediata :

a) Número de alumnos entre Matemáticas y Economía :

$435 + 1150 + 50 + 665 + 250 + 250 = 2800$

b) Número de alumnos matriculados en las tres asignaturas :

$2800 + 885 = 3685$ (2800 matriculados en Matemáticas y Economía)

c) Número de alumnos no matriculados en estas asignaturas :

315 (véase 8))

d) Número de alumnos matriculados solamente en Matemáticas:

435 (véase 5))

e) Número de alumnos matriculados solamente en una de las asignaturas dadas:

$435 + 250 + 885 = 1570$ (véase 5) , 6) y 7))

---oooOooo---

4.41. En una escuela se han matriculado 519 alumnos, en Matemáticas 271, en Física 204, en Química 319. Se sabe también que en Matemáticas y Física hay 55, en Física y Química hay 95 y en Matemáticas y Química 168.

¿Cuántos alumnos hay matriculados a la vez en Matemáticas, Física y Química?. [JRV-I-21]

SOLUCION :

Sean : $M = \{x/\ x \text{ estudia Matemáticas}\}$

$F = \{x/\ x \text{ estudia Física}\}$

$Q = \{x/\ x \text{ estudia Química}\}$

Por otra parte, en el ejercicio 1. se ha visto que :

$$\text{Card}(M \cup F \cup Q) = \text{Card}(M) + \text{Card}(F) + \text{Card}(Q) - \text{Card}(M \cap F) - \text{Card}(M \cap Q) - \text{Card}(F \cap Q) + \text{Card}(M \cap F \cap Q)$$

y sustituyendo en esta fórmula los datos del problema resulta :

$$\begin{aligned} 519 &= 271 + 204 + 314 - 55 - 168 - 95 + \text{Card}(M \cap F \cap Q) \\ &= 769 - 318 + \text{Card}(M \cap F \cap Q) \\ &= 471 + \text{Card}(M \cap F \cap Q) \end{aligned}$$

de donde , $\text{Card}(M \cap F \cap Q) = 519 - 471 = 48$

Por tanto, hay 48 alumnos matriculados a la vez en Matemática, Física y Química.

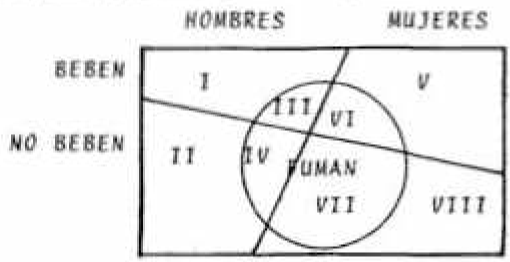
4.42. En una reunión hay más hombres que mujeres, más mujeres que beben que hombres que fuman, y más mujeres que fuman y no beben que hombres que no beben ni fuman. Demostrar que hay menos mujeres que no beben ni fuman que hombres que beben y no fuman.

(OLIMPIADA MATEMATICA)

S O L U C I O N :

El conjunto formado por los hombres es disjunto del conjunto formado por las mujeres; el conjunto formado por los que beben es disjunto del conjunto formado por los que no beben, y el conjunto formado por los que fuman es disjunto con el conjunto formado por los que no fuman.

En el siguiente diagrama de Venn se muestran los conjuntos anteriores y sus intersecciones; en total 8 conjuntos disjuntos.



En la figura se ha numerado las regiones que representan cada uno de los 8 conjuntos. Así, por ejemplo, I indica el conjunto de los hombres que beben y no fuman, II es el conjunto de los hombres que no beben ni fuman, etc.

Se tiene por tanto,

$$\text{card}(I) + \text{card}(II) + \text{card}(III) + \text{card}(IV) > \text{card}(V) + \text{card}(VI) + \text{card}(VII) + \text{card}(VIII)$$

$$\text{card}(V) + \text{card}(VI) > \text{card}(III) + \text{card}(IV)$$

$$\text{card}(VII) > \text{card}(II)$$

Sumando estas desigualdades miembro a miembro y simplificando se tiene :

$$\text{card}(I) > \text{card}(VIII)$$

donde I es , como se ha dicho , conjunto de hombres que beben y no fuman y VIII es el conjunto de mujeres ni beben ni fuman.

---oooOooo---

4.43. En una oficina de colocación se ofrecen 29 puestos del ramo de la construcción. 13 son albañiles, 13 fontaneros y 15 carpinteros; además, de éstos 6 tienen que ser albañiles y fontaneros, 4 fontaneros y carpinteros y 5 albañiles y carpinteros.

Se pide :

a) ¿Cuántos tienen que ser las tres cosas a la vez?

b) ¿A cuántas personas que solo tengan el oficio de albañil se les puede ofrecer empleo?

c) ¿Cuántas personas se requieren que sean carpinteros y albañiles pero no fontaneros?

SOLUCION :

Sea $A = \{albañiles\}$

$F = \{fontaneros\}$

$C = \{carpinteros\}$

i) $Card(A \cap F \cap C) = 29$; $Card(A) = 13$; $Card(F) = 13$; $Card(C) = 15$

$Card(A \cap F) = 6$; $Card(F \cap C) = 4$; $Card(A \cap C) = 5$

Por otra parte se sabe que :

$$Card(A \cup F \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap F) - Card(A \cap C) - Card(C \cap F) + Card(A \cap F \cap C)$$

Sustituyendo se tiene:

$29 = 13 + 13 + 15 - 6 - 4 - 5 + Card(A \cap F \cap C)$ de donde ,

$$Card(A \cap F \cap C) = 3$$

ii) Sea $X = \{solo\ albañiles\}$

$$Card(X) = Card(A) - Card(A \cap F) - Card(A \cap C) + Card(A \cap F \cap C) = 13 - 6 - 5 + 3 = 5$$

iii) Sea $Y = \{carpinteros\ y\ albañiles\ pero\ no\ fontaneros\}$

$$Card(Y) = Card(A \cap C) - Card(A \cap F \cap C) = 5 - 3 = 2$$

---oooOooo---

4.44. En un grupo de 200 alumnos de selectivo hay 70 alumnos que estudian matemáticas, 120 física y 90 química; además 50 estudian matemáticas y física, 30 matemáticas y química, 40 física y química, y finalmente 20 las tres asignaturas.

Se pide :

a) ¿Es correcta la información si todos estudian alguna de las tres?

b) ¿Cuántos alumnos estudian matemáticas o física?.

c) ¿Cuántos alumnos no estudian ninguna asignatura de las dadas?

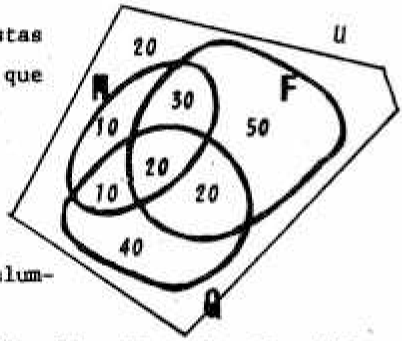
d) ¿Cuántos alumnos estudian matemáticas o química?

e) ¿Cuántos alumnos estudian al menos alguna de las tres?

f) ¿Cuántos alumnos estudian física o química?

SOLUCION :

El siguiente diagrama de Venn muestra las 8 regiones en que tres conjuntos dividen al conjunto universal U (= conjunto de alumnos de selectivo) .



a) Si todos los estudiantes cursan solo estas asignaturas la información es falsa ya que
Card(Matemáticas $\cup$ Física $\cup$ Química) =
= 70 + 120 + 90 - 50 - 30 - 40 + 20
= 180
que no es el número total de alumnos.
Si no imponemos esta condición hay 20 alumnos que no estudian estas asignaturas.

b) Card(M $\cup$ F) = Card(M) + Card(F) - Card(M $\cap$ F) = 70 + 120 - 50 = 140

c) Lo hemos visto ya : 20 alumnos

d) Card(M $\cup$ Q) = Card(M) + Card(Q) - Card(M $\cap$ Q) = 70 + 90 - 30 = 140

e) La contestación viene dada en a) : 180 alumnos

f) Card(F $\cup$ Q) = Card(F) + Card(Q) - Card(F $\cap$ Q) = 120 + 90 - 40 = 170

---oooOooo---

4.45. En el conjunto formado por todos los números naturales menores que 1000 decir cuántos números hay que no son múltiplos ni de 3 ni de 5 ni de 7. Los números naturales se consideran elementos de $\mathbb{N}^*$.

(OLIMPIADA MATEMATICA)

SOLUCION :

Sean A = {múltiplos de 3} ; B = {múltiplos de 5} ; C = {múltiplos de 7}

entonces
A $\cap$ B = {múltiplos de 3 y 5} = {múltiplos de 15}
A $\cap$ C = {múltiplos de 3 y 7} = {múltiplos de 21}
B $\cap$ C = {múltiplos de 5 y 7} = {múltiplos de 35}
A $\cap$ B $\cap$ C = {múltiplos de 2 ,5 y 7} = {múltiplos de 105}
(A $\cup$ B $\cup$ C)' = {no múltiplos de 3 ni de 5 ni de 7.}

a) Card(A) = 999/3 = 333 ya que 999 es el último múltiplo de 3 < 1000
Card(B) = 995/5 = 199 ya que 995 es el último múltiplo de 5 < 1000
Card(C) = 994/7 = 142 ya que 994 es el último múltiplo de 7 < 1000

De una manera análoga se calculan los cardinales siguientes :
Card(A $\cap$ B) = 66 ; Card(A $\cap$ C) = 47 ; Card(B $\cap$ C) = 28
Card(A $\cap$ B $\cap$ C) = 9

b) El cardinal de la unión de los tres conjuntos es :
Card(A $\cup$ B $\cup$ C) = 333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9 = 542

c) El cardinal de conjunto complementario que nos da el número de números no múltiplos de 3 ni de 5 ni de 7 es :
Card((A $\cup$ B $\cup$ C)') = 999 - Card(A $\cup$ B $\cup$ C)
= 999 - 542 = 457

4.46. Se llama distancia entre dos conjuntos finitos X e Y, y se representa por d(X,Y), al número de elementos de su diferencia simétrica.

Demostrar que para cualesquiera que sean los conjuntos A,B y C, se verifica que :

$$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$$

(SELECTIVIDAD -1976)

SOLUCION :

a) $d(X,Y)$ = número de elementos de su diferencia simétrica $= \mathrm{Card}(X \,\Delta\, Y)$

b) Por otra parte, se ha demostrado en el ejercicio 1.41. la siguiente relación

$$A \,\Delta\, C \subset (A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C)$$

para cualesquiera conjuntos A,B y C.

De a) y b) se sigue que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \Delta C) &\leqslant \mathrm{Card}((A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C))\\ &= \mathrm{Card}(A \,\Delta\, B) + \mathrm{Card}(B \,\Delta\, C) - \mathrm{Card}((A \,\Delta\, B) \cap (B \,\Delta\, C)\\ &\leqslant \mathrm{Card}(A \,\Delta\, B) + \mathrm{Card}(B \,\Delta\, C)\end{aligned}$$

es decir, $d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

---oooOooo---

4.47. Determinar el número de elementos que no pertenecen a ninguno de los conjuntos A, B y C sabiendo que hay N elementos en total,de los cuales la tercera parte pertenecen a A,la tercera parte a B ,la tercera parte a C,la quinta parte a cada par de ellos y la décima parte a los tres.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Sabemos que se verifica la siguiente relación :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = {} & \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \\ & \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \\ & \mathrm{Card}(A \cap B \cap C) ,\end{aligned}$$

sustituyendo se tiene :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \frac{N}{3} + \frac{N}{3} + \frac{N}{3} - \frac{N}{5} - \frac{N}{5} - \frac{N}{5} + \frac{N}{10}\\ &= N(1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{10}) = N(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) = \frac{5N}{10} = \frac{N}{2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathrm{Card}(\overline{A \cup B \cup C}) = N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2} ,$$

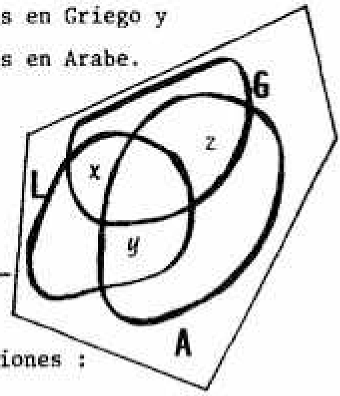
siendo $\mathrm{Card}(\overline{A \cup B \cup C})$ el número de elementos que no pertenecen ni a A , ni a B ni a C.

4.48. En un curso donde hay 40 alumnos, cada uno de los cuales está matriculado en dos, y solo en dos, de las asignaturas de Latín, Griego y Arabe, se sabe que en Latín hay matriculados en total 33 alumnos, y que en Griego hay matriculados en total 33 alumnos. ¿Cuántos alumnos hay matriculados en Latín y en Griego simultáneamente?. ¿Por qué?. Hacer un diagrama de Venn.

(SELECTIVIDAD 1975-Madrid)

SOLUCION :

1) Consideremos primero el diagrama de Venn de la figura adjunta.
L designa el conjunto de los alumnos matriculados en Latín
G designa el conjunto de los alumnos matriculados en Griego y
A designa el conjunto de los alumnos matriculados en Arabe.



$x = \text{card}(L \cap G)$
$y = \text{card}(L \cap A)$
$z = \text{card}(G \cap A)$
Los demás subconjuntos señalados en el diagrama de Venn son vacíos según las condiciones del problema.

2) Se tiene por tanto el siguiente sistema de ecuaciones :

$$x + y + z = 40$$
$$x + y = 33$$
$$x + z = 33$$

Resolviendo el sistema se obtiene :

$$x = 26 \quad , \quad y = 7 \quad , \quad z = 7$$

3) El número de alumnos matriculados simultáneamente en Griego y el Latín es 26.

---oooOooo---

5 COMBINATORIA

en el que se desarrollan las siguientes materias :

1. VARIACIONES SIN REPETICION
2. FACTORIALES
3. PERMUTACIONES SIN REPETICION
4. COMBINACIONES SIN REPETICION
5. NUMEROS COMBINATORIOS
6. VARIACIONES CON REPETICION
7. PERMUTACIONES CON REPETICION
8. COMBINACIONES CON REPETICION

5.1. Hallar x en la siguiente ecuación :

$$V_{x,4} = 20.V_{x,2} \qquad (x > 3)$$

(*JRV-V-6*)

S O L U C I O N :

- $V_{x,4}$ son las variaciones de x elementos tomados de 4 en 4.
- $V_{x,2}$ son las variaciones de x elementos tomados de 2 en 2

Entonces :

$$V_{x,4} = 20.\ V_{x,2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(x-1)(x-2)(x-3) = 20.\ x(x-1) \qquad \text{, simplificando por } x(x-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x-2)(x-3) = 20$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 20 \qquad \text{, haciendo operaciones}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x - 14 = 0 \qquad \text{, restando 20}$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado, resulta :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = 7, x_2 = -2$$

De las dos soluciones solo es válida $x = 7$, ya que x es el cardinal de un conjunto.

---oooOooo---

5.2. Resolver la siguiente ecuación :

$$V_{x,3} = 24.C_{x-2,2} \qquad (x > 3)$$

(*JRV-V-2*)

S O L U C I O N :

- $V_{x,3}$ son las variaciones de x elementos tomados de 3 en 3.
- $C_{x-2,2}$ son las combinaciones de x-2 elementos tomados de 2 en 2.

$$V_{x,3} = 24.C_{x-2,2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(x-1)(x-2) = 24 \frac{(x-2)(x-3)}{1\ .\ 2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x(x-1) = 12(x-3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - x = 12x - 36$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 13x + 36 = 0$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado , resulta :

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

luego las raíces son : $x_1 = 9$, $x_2 = 4$

Por tanto, x puede tomar los valores 9 y 4.

5.3. Hallar el número de permutaciones de las cifras 1,2,3,4 y 5 en las cuales las tres primeras cifras conserven siempre el orden relativo 1,2,3. (PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

Si las cifras 1,2,3 han de conservar este orden, las dos cifras restantes 4 y 5 pueden intercalarse entre ellas de todas las maneras posibles.

a) Las cifras 4 y 5 van seguidas :

Los casos posibles son :

CC123 , 1CC23 , 12CC3 , 123CC donde C puede ser 4 o 5 , luego el número de casos es 8

b) Las cifras 4 y 5 se colocan alternativamente :

La colocación posible es : C 1 C 2 C 3 C donde C puede ser 4 o 5. Influyendo el orden en que se toman las cifras y el lugar donde se colocan, los números diferentes se obtienen hallando las variaciones de 4 elementos tomados de dos en dos. Por tanto

$$\text{Número de casos posibles en b)} = V_{4,2} = 4.3$$

De a) y b) se sigue que :

$$\text{Número de permutaciones} = 8 + 12 = 20$$

---oooOooo---

5.4. El sextuplo del número de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados de 3 en 3, es igual al número de variaciones que se pueden formar con m-1 objetos tomados de 4 en 4. Hallar el valor de m, $m > 4$. (PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

La ecuación deducida del enunciado es la siguiente:

$$6.C_{m,3} = V_{m-1,4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6. \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = (m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad m = (m-3)(m-4)$$

$$\Leftrightarrow \quad m = m^2 - 7m + 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = m^2 - 8m + 12$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado , resulta :

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow m = 6 \text{ o } m = 2$$

Como $m > 4$, se sigue que $m = 6$.

5.5. Resolver la siguiente ecuación :

$$3.\binom{x+2}{3} = 5.\binom{x+1}{2}$$

(JRV-V-15)

SOLUCION :

$$3.\binom{x+2}{3} = 5.\binom{x+1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3.\frac{(x+2)(x+1)x}{1\,.\,2\,.\,3} = 5.\frac{(x+1)x}{1.2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x+2 = 5$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 3$$

El valor de x , es por tanto ,3.

---oooOooo---

5.6. Se tienen 17 bolas diferentes y dos cofres.¿De cuántas maneras es posible colocar 8 bolas en uno de ellos y 9 en el otro?.

SOLUCION :

A cada combinación de 8 bolas dentro de un cofre le corresponde otra de 9 bolas en el otro.Estas diferentes maneras es igual al siguiente número combinatorio:

$$C_{17,8} = C_{17,9} = \frac{17.16.15.14.13.12.11.10}{8.7.6.5.4.3.2.1} = 17.13.11.10 = 24\ 310$$

---oooOooo---

5.7. Hallar todos los números capicúas de cinco cifras.

(JRV-V-4)

SOLUCION :

Los números capicúas de cinco cifras son de la forma : a b c b a con a,b y c cifras.

1°) El lugar de la cifra "a" lo pueden ocupar todas las cifras menos el 0.
Por tanto, el número de posibilidades de elección de "a" es 9.

2°) El lugar de la cifra "b" lo pueden ocupar todas las cifras.
Por tanto, el número de posibilidades de elección de "b" es 10

3°) Finalmente, el lugar de la cifra "c" lo pueden ocupar todas las cifras.
Por tanto, el número de posibilidades de elección de "c" es 10.

En consecuencia :

Número de capicúas = elecciones de a × elecciones de b × elecciones de c

= 9 . 10 . 10

= 900

5.8. De un total de cinco franceses y siete ingleses se forma un comite con dos franceses y tres ingleses. De cuántas formas se pueden agrupar en los siguientes casos :

1°) Puede pertenecer al comite cualquier francés o inglés.

2°) Un inglés determinado debe pertenecer al comité

3°) Dos franceses determinados no pueden estar en el comité.

(*JRV-V-17*)

S O L U C I O N :

1°) a) El número de elecciones distintas de dos franceses es : $\binom{5}{2}$

b) El número de elecciones distintas de tres ingleses es : $\binom{7}{3}$

Por tanto,

$$\text{Número de comités distintos} = \binom{5}{2}\binom{7}{3} = 10.35 = 350$$

2°) a) El número de elecciones distintas de dos franceses es 10, según hemos visto arriba.

b) El número de elecciones distintas de dos ingleses, ya que uno pertenece al comité , es : $\binom{6}{2}$

Por tanto,

$$\text{Número de comités distintos} = \binom{5}{2}\binom{6}{2} = 10.15 = 150$$

3°) a) El número de elecciones distintas de dos franceses es : $\binom{3}{2}$, puesto que dos franceses determinados no pueden estar en el comité.

b) El número de elecciones distintas de tres ingleses es 35 .(Ver 1°).

Por tanto,

$$\text{Número de comités distintos} = \binom{3}{2}\binom{7}{3} = 3\ .35 = 105$$

---oooOooo---

5.9. Un interruptor tiene dos posiciones : Apertura y cierre. En un cuadro con 6 interruptores, ¿de cuántas formas pueden estar 4 de ellos cerrados?. (*JRV-V-20*)

S O L U C I O N :

Consideremos el siguiente esquema que muestra los 6 interruptores :

Una forma de estar 4 interruptores cerrados puede ser la siguiente :

Se trata, pues, de combinaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4.

Por tanto,

$$\text{Número de posiciones diferentes} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$$

5.10. Un estudiante tiene que contestar 8 de 10 preguntas de un examen.

1°) ¿Cuántas formas diferentes de contestar tiene?

2°) ¿Cuántas formas diferentes de contestar tiene si las tres primeras preguntas son obligatorias?.

3°) ¿Cuántas formas diferentes de contestar tiene si de las cinco primeras preguntas ha de contestar 4?.

S O L U C I O N :

1°) Se trata de elegir de 10 preguntas 8, por tanto, son combinaciones de 10 elementos tomados de 8 en 8.

Número de formas diferentes de contestar $= \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{9.10}{1.\ 2} = 45$

2°) Siendo las tres primeras preguntas obligatorias, debe elegir las otras cinco de las siete restantes.

Número de formas diferentes de contestar $= \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{6.7}{1.2} = 21$

3°) Veamos las dos posibilidades siguientes :

a) Contesta las 5 primeras.

Entonces las otras tres las puede elegir de las 5 restantes.

Número de formas diferentes de contestar $= \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$

b) Contesta 4 de las 5 primeras.

i) El número de posibilidades de contestar 4 de las 5 primeras es :

$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

ii) El número de posibilidades de contestar 4 de las 5 últimas es :

$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$

Por tanto, puede elegir las 8 preguntas en este caso de $5.5 = 25$ formas diferentes.

De a) y b) se sigue que :

Número de formas diferentes de contestar $= 10 + 25 = 35$

---oooOooo---

5.11. Para jugar al dominó 7 fichas hacen un juego. Sabiendo que son 28 fichas, hallar cuántos juegos diferentes pueden hacerse con ellas. (JRV-V-9)

S O L U C I O N :

No influyendo el orden de las fichas, se trata de combinaciones de 28 elementos tomados de 7 en 7. Por tanto ,

Número de juegos diferentes $= \binom{28}{7} = \frac{28.27.26.25.24.23.22}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} = 9.13.5.8.11$

$= 51\ 580$

5.12. Dados n puntos del espacio,de los que se supone que no hay tres en linea, ni cuatro en un mismo plano.Se consideran las rectas que resultan de unirlos de dos en dos (cada recta queda determinada por dos puntos) y los planos que se obtienen al considerar cada tres (tres puntos determinan un plano). Se pide :

1°) Hallar el número de rectas que determinan los n puntos.

2°) Hallar el número de planos que determinan los n puntos.

3°) Hallar el número n, para que el número de planos se igual al número de recta.

4°) Si se ordenan los n puntos, y se unen el primero con el segundo,éste con el tercero, el tercero con el cuarto, etc. , el último con el primero resulta una figura que podemos llamar polígono,cuyos lados son los segmentos anteriores;los demás segmentos que los unen se llaman diagonales.
Hallar el número de éstas.

5°) Hallar n para que el número de diagonales sea el doble que el de lados. *(PREUNIVERSITARIO)*

S O L U C I O N :

1°) El número de rectas (ya que dos puntos determinan una recta y solo una) viene dado por el número de combinaciones de n elementos tomados de dos en dos. Por tanto,

$$\text{Número de rectas} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2°) El número de planos (ya que tres puntos determinan un plano y solo uno) viene dado por el número de combinaciones de n elementos tomados de tres en tres. Por tanto,

$$\text{Número de planos} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

3°) $\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ de donde $n = 5$

4°) De cada vértice del polígono salen o parten $n - 3$ diagonales , ya que este forma diagonales con todos los restantes menos con los dos adyacentes y el mismo.

$$\text{Número de diagonales} = \frac{n(n-3)}{2}$$

puesto que dos vértices determinan una diagonal y al considerar los dos vértices la contamos dos veces.

5°) La condición del enunciado se traduce en :

$$\frac{n(n-3)}{2} = 2n \iff n - 3 = 4 \iff n = 7$$

5.13. El conjunto **U** tiene 28 subconjuntos de dos elementos. ¿Cuántos elementos tiene **U**?.

SOLUCION:

Sea $x = Card(U)$, es decir, el número de elementos de U, entonces el número de subconjuntos de dos elementos es $\binom{x}{2}$. Por tanto,

$$\binom{x}{2} = \frac{1}{2}x.(x-1) = 28 \Rightarrow x(x-1) = 56 \Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se tiene : $x = 8$. Luego, $Card(\mathbf{U}) = 8$

---oooOooo---

5.14. Un conjunto **U** tiene 64 subconjuntos. Se pide :

a) Número de elementos de **U**

b) Número de subconjuntos de 0,1,2,...,n elementos, siendo n el número de elementos de **U**

SOLUCION:

Hemos visto en el capítulo anterior que si un conjunto tiene n elementos, entonces el número de subconjuntos es 2^n. Por tanto :

a) $$2^n = 64 \Rightarrow 2^n = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

Luego, $Card(U) = 6$

b) Subconjuntos de 0 elementos : 1 (el subconjunto $\emptyset$)

Subconjuntos de 1 elemento : 6

Subconjuntos de 2 elementos : $\binom{6}{2} = \frac{6.5}{1.2} = 15$

Subconjuntos de 3 elementos : $\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$

Subconjuntos de 4 elementos : $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

Subconjuntos de 5 elementos : $\binom{6}{5} = \binom{6}{1} = 6$

Subconjuntos de 6 elementos : 1

---oooOooo---

5.15. Un conjunto **U** tiene 10 subconjuntos de 3 elementos. ¿Cuántos elementos tiene **U**?.

SOLUCION:

Sea $x = Card(U)$, entonces el número de subconjuntos de 3 elementos es $\binom{x}{3}$

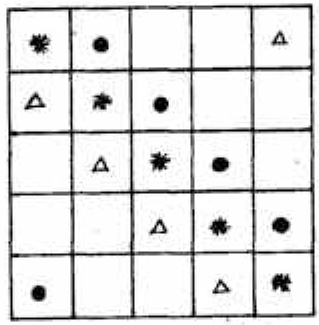
Por tanto, $$\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} = 10 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 60$$

Como x debe ser un número natural el único que cumple esta ecuación es $x = 5$.
Luego, $Card(\mathbf{U}) = 5$

5.16. Se tiene un tablero de damas de 5 por 5 y se colocan 5 fichas de modo que en cada fila haya una sola ficha y también una sola en cada columna. Se pide :

a) ¿De cuántas maneras pueden colocarse siendo las fichas indistinguibles entre sí?.

b) ¿Y si son distinguibles?.



S O L U C I O N :

Consideremos el tablero de la figura adjunta. Como debe haber una ficha en cada fila y en cada columna,podemos colocar desde el principio una ficha en cada columna y luego permutar las fichas según las filas.

a) Por tanto,

Número de maneras de colocación de fichas $= 5! = 1.2.3.4.5 = 120$

b) Si son distinguibles las fichas cada una de las formas de a) da lugar a $5! = 1.2.3.4.5 = 120$ formas distintas.

Por tanto,

Número de maneras de colocación de fichas $= 5!.\ 5! = 120.120 = 14400$

---oooOooo---

5.17. Se considera el siguiente cuadrado de números :

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

¿Cuántos productos distintos se pueden formar de modo que en cada producto entre un número de cada fila y uno de cada columna?.

S O L U C I O N :

Cada producto tiene cinco factores y cada uno de los factores pertenece a una fila y a una columna.

Son productos distintos, por ejemplo , $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$, $a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$, ...

Teniendo en cuenta que se verifica la propiedad conmutativa,estamos en el primer caso del ejercicio anterior.

Por tanto,

Número de factores distintos $= 4! = 1.2.3.4 = 24$

5.18. Resolver la siguiente ecuación : $P_n = 8.P_{n-1}$

(*JRV-V-8*)

<u>SOLUCION</u> :

- P_n son las permutaciones de n elementos.
- P_{n-1} son las permutaciones de n-1 elementos.

Entonces : $P_n = 8.P_{n-1}$

$\iff n! = 8.(n-1)!$ (*véase la observación*)

$\iff n = 8$. Por tanto, la solución es $n = 8$

OBSERVACION : $n! = 1.2.3.4.5. \ldots .(n-3)(n-2)(n-1)n$

$(n-1)! = 1.2.3.4.5. \ldots .(n-3)(n-2)(n-1)$

---oooOooo---

5.19. En un torneo de baloncesto participan el Madrid, el Estudiantes y el Juventud de Badalona. ¿De cuántas maneras pueden clasificarse?.

(*JRV-V-3*)

<u>SOLUCION</u> :

El número de clasificaciones distintas viene dado por el número de permutaciones del conjunto {Madrid , Estudiantes , Juventud}.

Por tanto : Número de clasificaciones $= P_3 = 3! = 6$

Si designamos los equipos por sus iniciales, las distintas maneras de clasificar se vienen dadas en el siguiente diagrama en arbol :

M	E	J	: M - E - J
	J	E	: M - J - E
E	M	J	: E - M - J
	J	M	: E - J - M
J	M	E	: J - M - E
	E	M	: J - E - M

---oooOooo---

5.20. ¿De cuántas formas pueden colocarse 4 alumnos en un banco ?.

(*JRV-V-11*)

<u>SOLUCION</u> :

Se trata de permutaciones de 4 elementos . Por tanto ,

Número de formas de colocarse $= P_4 = 4! = 1.2.3.4 = 24$

5.21. ¿Cuántos números de cinco cifras sin que se repita ninguna de ellas, se pueden formar con las cifras 0,1,2,3,4?. Calcular su suma. (JRV-V-12)

SOLUCION :

a) Cálculo del número de números que se pueden formar.

Con las cifras 0,1,2,3,4 se pueden formar $P_5 = 5! = 120$ números, es decir, los números que se obtienen permutando las cinco cifras.

De estos 120 números, no todos tienen 5 cifras, puesto que los números que comienzan por la cifra 0 tienen en realidad 4 cifras.

1°) Números que comienzan por 0 :

$120 : 5 = 24$

2°) Números de cinco cifras :

$120 - 24 = 96$

b) Cálculo de la suma de estos 96 números de cinco cifras.

1°) Suma de las unidades :

$24.0 + 18.1 + 18.2 + 18.3 + 18.4 = 18(1 + 2 + 3 + 4)$

Nótese que al quitar 24 números que empiezan en 0 , hemos quitado 24 números que terminan: 6 en 1 , 6 en 2 , 6 en 3 y 6 en 4

2°) Suma de las decenas :

$24.0 + 18.1 + 18.2 + 18.3 + 18.4 = 18(1 + 2 + 3 + 4)$

3°) Suma de las centenas :

$24.0 + 18.1 + 18.2 + 18.3 + 18.4 = 18(1 + 2 + 3 + 4)$

4°) Suma de los millares :

$24.0 + 18.1 + 18.2 + 18.3 + 18.4 = 18(1 + 2 + 3 + 4)$

5°) Suma de las decenas de millar :

$24.1 + 24.2 + 24.3 + 24.4 = 24(1 + 2 + 3 + 4)$

Nótese que ningún número comienza por 0 y hay 24 que comienzan por 1, 24 por 2 , 24 por 3 y 24 por 4.

Sumando los números de los apartados anteriores se tiene :

$$\begin{aligned}
\text{SUMA} &= 18(1 + 2 + 3 + 4).\,1 \;+ \\
&\quad 18(1 + 2 + 3 + 4).\,10 \;+ \\
&\quad 18(1 + 2 + 3 + 4).\,100 \;+ \\
&\quad 18(1 + 2 + 3 + 4).\,1000 \;+ \\
&\quad 24(1 + 2 + 3 + 4).\,10000 \\
&= (1 + 2 + 3 + 4)(18.1 + 18.10 + 18.100 + 18.1000 + 24.10000) \\
&= 10(18 + 180 + 1800 + 18000 + 240000) \\
&= 2\,599\,980
\end{aligned}$$

5.22. Consideremos escritas en orden alfabético todas las permutaciones posibles de las letras A,B,C,D y E.

a) ¿Qué permutación ocupa el lugar 73?.

b) ¿Qué lugar ocupará la permutación CDABE?

(*JRV-V-14*)

SOLUCION :

a) Permutaciones que empiezan por A , A - - - - : 24

(puesto que detrás de A se pueden colocar, permutándolas, las cuatro letras restantes).

Permutaciones que empiezan por B , B - - - - : 24

Permutaciones que empiezan por C , C - - - - : 24

Luego, por A,B y C empiezan : 24 + 24 + 24 = 72

La permutación 73 empezará, por tanto, por la letra D y será :

D A B C E

b) Permutaciones que empiezan por A , A - - - - : 24

Permutaciones que empiezan por B , B - - - - : 24

Permutaciones que empiezan por CA, C A - - - : 6

Permutaciones que empiezan por CB, C B - - - : 6

La permutación siguiente es , C D A B E : 1

Por tanto, la permutación CDABE ocupa el lugar : 61

---oooOooo---

5.23. Colocadas en orden alfabético todas las permutaciones de ABCDEFG , se desea saber el lugar que ocupa la permutación dada por "CGADBEF".

(*PREUNIVERSITARIO*)

SOLUCION :

Número de permutaciones que empiezan por A	, A - - - - - -	= 6! = 720
Número de permutaciones que empiezan por B	, B - - - - - -	= 6! = 720
Número de permutaciones que empiezan por CA	, C A - - - - -	= 5! = 120
Número de permutaciones que empiezan por CB	, C B - - - - -	= 5! = 120
Número de permutaciones que empiezan por CD	, C D - - - - -	= 5! = 120
Número de permutaciones que empiezan por CE	, C E - - - - -	= 5! = 120
Número de permutaciones que empiezan por CF	, C F - - - - -	= 5! = 120
Número de permutaciones que empiezan por CGAB	, C G A B - - -	= 3! = 6
	Total	= 2046

La siguiente permutación es precisamente la pedida, es decir, C G A D B E F, y ocupará , por tanto , el lugar 2047.

5.24. ¿Cuántas ordenaciones diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra **PERMUTACION**?.
¿Cuántas empiezan por **P**?.
¿Cuántas empiezan por PER?. *(JRV-V-13)*

S O L U C I O N :

a) Las ordenaciones diferentes que se pueden formar con todas las letras de la palabra **PERMUTACION** son las permutaciones de estas 11 letras. Por tanto ,

Número de ordenaciones diferentes = $P_{11} = 11! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11$
$= 39916800$

b) ¿Cuántas empiezan por **P**?.

Las palabras que comienzan por **P** son de la forma

P - - - - - - - - - -

y se obtienen permutando las letras restantes (indicadas por trazos).

Numero de ordenaciones que comienza por **P** = $P_{10} = 10!$
$= 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10$
$= 3628800$

c) ¿Cuántas empiezan por **PER**?.

Las palabras que comienzan por **PER** son del forma

PER - - - - - - - -

y se obtienen permutando las letras restantes (indicadas por trazos).

Número de ordenaciones que comienzan por **PER** = $P_8 = 8!$
$= 1.2.3.4.5.6.7.8.$
$= 40320$

---oooOooo---

5.25. ¿Cuántos números de cinco cifras distintos pueden formarse con las cifras 2,3,4,5 y 6 que sean menores de 65000, no pudiéndose repetir ninguno?. *(SELECTIVIDAD - 1976)*

S O L U C I O N :

Es evidente que se trata de permutaciones de 5 elementos,puesto que solamente hay cinco cifras y deben entrar en la formación del número las cinco ya que no se repiten.

a) Números diferentes que se pueden formar = $P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120$

b) De estos 120 números no cumplen la condición los que son mayores que 65000.
Números que empiezan por 65 : 6 5 - - - = $3! = 1.2.3 = 6$,
puesto que en los tres trazos podemos colocar los números 2,3 y 4 de 6 maneras diferentes.

c) Números menores que 65000 = $120 - 6 = 114$.

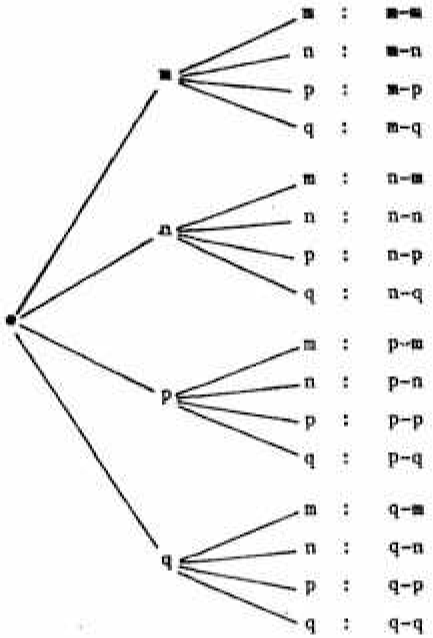
5.26. Usando un diagrama de arbol hallar las variaciones de los elementos m,n,p,q tomados de dos en dos:

a) con repetición ,

b) sin repetición. [JRV-V-5]

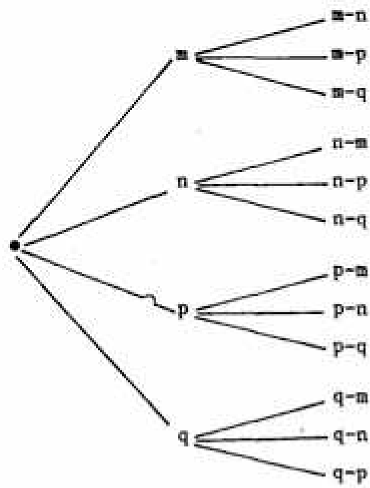
SOLUCION:

a) Variaciones con repetición.



El número de variaciones con repetición es $4.4 = 4^2 = 16$.

b) Variaciones sin repetición



El número de variaciones sin repetición es $4.3 = 12$

---oooOooo---

5.27. ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden escribir con las cifras 1,2,4,6 sabiendo que el 2 se repite 3 veces y el 6 se repite 4 veces?. [JRV-V-19]

SOLUCION:

Un número de los pedidos será de la forma siguiente: 1 2 2 2 4 6 6 6 6

Es evidente que se trata de las permutaciones con repetición de 9 elementos de los cuales el 2 se repite 3 veces y el 6 se repite 4 veces.

Por tanto,

$$\text{Número de números diferentes} = \frac{9!}{3!.4!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.4} = 2520$$

5.28. ¿Cuántos productos diferentes de cuatro factores pueden formarse con los números 3,5,7,9?.

a) Sin repetición

b) Con repetición. *(JRV-V-10)*

S O L U C I O N :

a) Con los números 3,5,7 y 9 solamente se puede formar el producto 3.5.7.9 puesto que los que se obtienen permutando estos números son iguales por la propiedad conmutativa del producto.

b) El número de productos diferentes que se pueden formar con los números 3,5,7,9 ,repitiéndolos, es igual al número de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 4 en 4. Por tanto :

número de productos diferentes $= CR_{4,4} = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$

OTRO METODO:

1) Productos diferentes repitiendo 4 veces cada número :

3.3.3.3 ; 5.5.5.5 ; 7.7.7.7 ; 9.9.9.9

Número de productos = 4

2) Productos diferentes repitiendo 3 veces cada número :

$$3.3.3.\left\{\begin{matrix}5\\7\\9\end{matrix}\right. \quad ; \quad 5.5.5.\left\{\begin{matrix}3\\7\\9\end{matrix}\right. \quad ; \quad 7.7.7.\left\{\begin{matrix}3\\5\\9\end{matrix}\right. \quad ; \quad 9.9.9.\left\{\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right.$$

Número de productos = 4.3 = 12

3) Productos diferentes repitiendo 2 veces cada número.

Consideremos que se repiten los dos primeros factores , entonces los dos últimos se pueden elegir de los tres números restantes y el número de posibilidades es $C_{3,2} = 3$

Números de productos = 4.3 = 12

4) Productos diferentes repitiendo los dos primeros factores y los dos últimos.

3.3.5.5 ; 3.3.7.7 ; 3.3.9.9 ; 5.5.7.7 ; 5.5.9.9 ; 7.7.9.9

Número de productos = 6

5) Productos diferentes sin repetir ningún factor.

Número de productos = 1 (Es el apartado a))

Sumando se tiene : 4 + 12 + 12 + 6 + 1 = 35

---oooOooo---

5.29. Con las cifras 6,7,8 y 9 :

1°) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse?.

2°) Hallar la suma de todos ellos

3°) Hallar la suma de todos los que terminan en 6.

(PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

1°) Si $A = \{6,7,8,9\}$ entonces los números de 6 cifras vienen dados por los elementos de $A \times A \times A \times A \times A \times A$. Su número es : $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4096$

Este número es también el de variaciones con repetición de cuatro elementos tomados de seis en seis.

2°) En estos 4096 números entrarán igual número de veces cada cifra, tanto en el lugar de la unidades , como de la decenas , centenas o millares. Por tanto, hay $4096 : 4 = 1024$ números que terminan en 6

1024 números que terminan en 7

1024 números que terminan en 8

1024 números que terminan en 9

$$\begin{aligned}
\text{SUMA} = {} & 1024(6+7+8+9).1 \;+ && \text{, suma de unidades}\\
& 1024(6+7+8+9).10 \;+ && \text{, suma de decenas}\\
& 1024(6+7+8+9).100 \;+ && \text{, suma de centenas}\\
& 1024(6+7+8+9).1000 \;+ && \text{, suma de millares}\\
& 1024(6+7+8+9).10000 \;+ && \text{, suma de decenas de millar}\\
& 1024(6+7+8+9).100000 && \text{, suma de centenas de millar}\\
= {} & 1024(6+7+8+9)(1+10+100+1000+10000+100000)\\
= {} & 1024 \,.\, 30 \,.\, 111111\\
= {} & 3\,413\,329\,920
\end{aligned}$$

3°) Hemos visto que los números que terminan en 6 son 1024.

En los lugares de la decenas, centenas, etc entrarán por igual las cifras 6,7,8 y 9. Su número es : $1024 : 4 = 256$

$$\begin{aligned}
\text{SUMA} = {} & 1024.6 \;+ && \text{, suma de las unidades}\\
& 256(6+7+8+9).10 \;+ && \text{, suma de las decenas}\\
& 256(6+7+8+9).100 \;+ && \text{, suma de las centenas}\\
& 256(6+7+8+9).1000 \;+ && \text{, suma de los millares}\\
& 256(6+7+8+9).10000 \;+ && \text{, suma de las decenas de millar}\\
& 256(6+7+8+9).100000 && \text{, suma de las centenas de millar}\\
= {} & 256(6+7+8+9)(10+100+1000+10000+100000) + 1024.6\\
= {} & 256.\ 30\ .111110 \;+ 1024.6\\
= {} & 853\,330\,944
\end{aligned}$$

5.30. Permutando de todos los modos posibles las cifras del número 111223 se forman distintos números que ordenaremos de menor a mayor.

1°) ¿Cuántos números resultan?

2°) ¿Qué número ocupa el lugar 50 en esa ordenación?.

(PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

1°) Los números distintos que se pueden formar son las permutaciones con repetición de 6 elementos de los cuales uno se repite 3 veces y otro dos veces

Por tanto,

$$\text{Números diferentes} = P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!.2!.1!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.1.2.1} = 60$$

2°) a) Números que empiezan por 1

Fija la primera cifra, quedan : 11223 y el número de números diferentes que se pueden formar es :

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!.2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = 30$$

b) Números que empiezan por 2.

Fija en el primer lugar la cifra 2, quedan : 11123 y el número de números diferentes que se pueden formar es :

$$P_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = 20$$

Por tanto, el número que ocupa el lugar 50 es el último de estos 20 números, es decir ,

$$\boxed{232111}$$

---oooOooo---

5.31. En una jaula hay 4 conejos blancos y cuatro conejos grises. Salen de la jaula de uno en uno.

¿De cuántas maneras distintas pueden hacerlo?. (Se consideran indistinguibles los cuatro conejos blancos y los cuatro conejos grises).

SOLUCION :

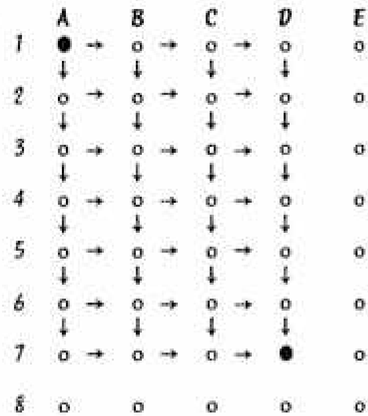
Si todos los conejos fueran distintos el número de formas de salir de la jaula sería 8! . Como hay 4 conejos blancos y cuatro conejos grises indistinguibles, es evidente que se trata de permutaciones con repetición de 8 elementos de los cuales se repiten 4 y 4.

Por tanto ,

$$\text{Número de formas de salir de la jaula} : \frac{8!}{4!.4!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.1.2.3.4} = 70$$

5.32. Las calles de una ciudad forman una cuadrícula. Si se designan por 1,2,3,... las que van de N a S y por A,B,C,... las que van de W a E, ¿cuántos caminos distintos de longitud mínima pueden seguirse para ir del cruce de las calles A-1 al cruce de las calles D-7?. *(JRV-V-18)*

SOLUCION:



Para pasar del cruce A-1 al cruce D-7 hay que recorrer:

- tres manzanas de W a E, y
- seis manzanas de N a S.

El número total de caminos es, por tanto, 9.

Si formamos las permutaciones con repetición 6 + 3 = 9 elementos, de los cuales suponemos que 6 son iguales entre sí y otros 3 iguales también entre sí, entonces cada permutación nos indica un camino a seguir de A-1 a D-7. Un camino, por ejemplo, es:

$$\rightarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

o bien,

$$\rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

Por tanto,

$$\text{Número de caminos distintos} = \frac{9!}{6!.3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.1.2.3} = 84$$

---oooOooo---

5.33. ¿Cuántos números mayores que un millón pueden escribirse con las cifras 0,2,2,3,3,3,4?. *(PREUNIVERSITARIO)*

SOLUCION:

a) Los números distintos que se pueden formar se obtienen hallando las permutaciones con repetición de 7 elementos de los cuales uno se repite 2 veces y otro tres.

$$\text{Número de números diferentes} = P_7^{1,2,3,1} = \frac{7!}{2!.3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.1.2.3} = 420$$

b) Los números que comienzan por la cifra 0 son menores que un millón, por tanto no se deben considerar.

El número de números que comienzan por 0 es: 420 : 7 = 60

De a) y b) se sigue que:

Números diferentes mayores que un millón = 420 − 60 = 360

5.34. Demostrar que, dadas tres cifras a,b,c :

1°) La suma de los números obtenidos formando las variaciones binarias es múltiplo de 22.

2°) La suma de los números obtenidos formando las variaciones ternarias con repetición es múltiplo de 37.

(PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

1°) Las variaciones binarias de tres elementos son : $V_{3,2} = 3.2 = 6$

También se pueden obtener directamente y son :

$$ab \;, ac \;, ba \,, ca \,, bc \,, cb$$

La suma de estos números es :

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= (a + b + c).2 \;+ && \text{, suma de las unidades} \\ &\quad\; (a + b + c).2.10 && \text{, suma de las decenas} \\ &= (a + b + c)(2 + 20) \\ &= (a + b + c).22 \end{aligned}$$

luego, la suma es un múltiplo de 22.

2°) Las variaciones ternarias de tres elementos tomados de tres en tres son:

$$VR_{3,3} = 3.3.3 = 27$$

En estos 27 números ,las cifras a,b,c se repiten 27 : 3 = 9 veces tanto en el lugar de las unidades, como de la decenas y centenas.

$$\begin{aligned} \text{SUMA} &= 9(a + b + c).1 \;+ && \text{, suma de las unidades} \\ &\quad\; 9(a + b + c).10 \;+ && \text{, suma de las decenas} \\ &\quad\; 9(a + b + c).100 && \text{, suma de las centenas} \\ &= 9(a + b + c)(1 + 10 + 100) \\ &= 999(a + b + c) = 37.27(a + b + c) \Rightarrow 37 \text{ divide a la SUMA.} \end{aligned}$$

---oooOooo---

5.35. Con las cifras 1,2 y 5 formamos números de 9 cifras de modo que el 1 se repita 3 veces, el 2 se repita 4 veces y el cinco dos veces. Hallar cuántos números hay.

(JRV-V-17)

SOLUCION :

Es evidente que se trata de permutaciones con repetición de 9 elementos entre los que hay uno que se repite tres veces , otro que se repite 4 veces y un tercero que se repite dos veces.

Por tanto :

$$P_9^{3,4,2} = \frac{9!}{3!.4!.2!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.4.1.2} = 1260$$

Luego, se pueden formar 1260 números diferentes.

5.36. Hallar el número mínimo de habitantes que debe tener una ciudad para que sea inevitable que al menos dos habitantes tengan las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos (con un alfabeto de 28) .

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Sean X,Y,Z las iniciales del nombre y dos apellidos de un habitante cualquiera. Vamos a calcular el número de ternas posibles con las 28 letras del alfabeto, repetidas o no.

Se trata, por tanto, de las variaciones con repetición de 28 elementos tomados de tres en tres. Su número es :

$$VR_{28,3} = 28.28.28 = 28^3 = 21\,952$$

Si asociamos a cada terna una sola persona, estaremos seguros que ninguno de ellos repiten las mismas iniciales de su nombre y dos apellidos. Luego, si añadimos otra persona, tendrá necesariamente que coincidir dichas iniciales con alguna de las ternas. Por tanto, el número mínimo de individuos será :

$$n = 21\,952 + 1 = 21\,953$$

---oooOooo---

5.37. En un circuito, en el que por determinado punto solo pueden pasar tres coches a la vez, se celebra una carrera en la que toman parte cinco coches. ¿De cuántas maneras distintas podrán pasar los coches por el citado punto?.

(PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

Como el número máximo de coches que pueden pasar por un determinado punto es 3, éstos pueden hacerlo de uno en uno , de dos en dos y de tres en tres.

a) Si pasan de uno de uno se tiene que :

$$\text{Número de formas distintas} = \binom{5}{1} = 5$$

b) Si pasan de dos en dos se tiene que :

$$\text{Número de formas distintas} = \binom{5}{2} = 10$$

c) Si pasan de tres en tres se tiene que :

$$\text{Número de formas distintas} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

Por tanto,

$$\text{Número total de formas diferentes} = 5 + 10 + 10 = 25$$

6 ALGEBRA DE SUCESOS

en el que se desarrollan las siguientes materias:

6.1. Enúnciese un experimento aleatorio asociado a cada uno de los siguientes campos : Sociología, ingeniería, tráfico.

[JRV-VI-1]

SOLUCION :

a) Sociología :

El experimento consiste en preguntar en clase a cada uno de los alumnos por su cantante preferido.

b) Ingeniería :

El experimento consiste en anotar la resistencia de 10 viguetas de hormigón elegidas en 10 casas en construcción.

c) Tráfico :

El experimento consiste en anotar el número de accidentes mortales cada semana durante un año.

---oooOooo---

6.2. Enúnciese un experimento aleatorio asociado a cada uno de los siguientes campos : Economía , medicina , pedagogía.

[JRV-VI-2]

SOLUCION :

a) Economía :

El experimento consiste en anotar las variaciones de la bolsa durante un mes Es evidente que este experimento es aleatorio.

b) Medicina :

El experimento consiste en estudiar el comportamiento de una medicina en 100 enfermos.

c) Pedagogía :

Un experimento aleatorio es el que consiste en ver las notas de una clase en la asignatura de Matemáticas durante un año.

---oooOooo---

6.3. ¿Sabrías enunciar algún tipo de experimento que no fuese aleatorio?.

[JRV-VI-3]

SOLUCION :

No son experimentos aleatorios, por ejemplo, los siguientes :

a) El cálculo de la velocidad de caída de un cuerpo en el vacío cada segundo.

b) La reacción del ácido sulfúrico con el hierro

c) El experimento consistente en lanzar una moneda de dos caras iguales y anotar su resultado.

d) Tampoco es aleatorio el dar una llave de luz y ver el resultado.

6.4. Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda y anotar la cara superior. Se pide :

a) El espacio muestral.

b) El espacio de sucesos.

SOLUCION :

a) Si E designa el espacio muestral,se tiene : $E = \{C,X\}$, indicando por C cara y por X cruz.

b) Si S designa el espacio de sucesos , se tiene : $S = \{\emptyset ,\{C\},\{X\},\{C,X\}\}$

---oooOooo---

6.5. Se considera el experimento consistente en lanzar un dado de quinielas al aire y anotar el resultado de la cara superior. Se pide :

a) Espacio muestral ,

b) Espacio de sucesos

SOLUCION :

a) Si E designa el espacio muestral , se tiene : $E = \{1 , X , 2\}$

b) Si S designa el espacio de sucesos, se tiene :

$$S = \{\emptyset ,\{1\},\{X\},\{2\},\{1,X\},\{1,2\},\{X,2\},\{1,X,2\}\}$$

---oooOooo---

6.6. Se considera el experimento consistente en lanzar un dado y anotar el número que aparece en la cara superior. Se pide :

a) Espacio muestral del experimento

b) El suceso "sacar un número par".

c) El suceso "sacar un número primo"

d) El suceso "sacar un múltiplo de 3".

SOLUCION :

a) Si E designa el espacio muestral se tiene : $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) Si A es el suceso "sacar un número par" , entonces $A = \{2,4,6\}$

c) Si B es el suceso "sacar un número primo", entonces $B = \{2,3,5\}$

d) Si C es el suceso "sacar un número múltiplo de 3" , entonces $C = \{3,6\}$

---oooOooo---

6.7. Se considera el experimento consistente en lanzar dos monedas al aire y anotar los resultados de las dos caras superiores. Se pide :

a) El espacio muestral,

b) El espacio de sucesos y su número.

SOLUCION :

a) Los resultados posibles son : Cara y Cara que indicaremos por CC
Cara y Cruz que indicaremos por CX
Cruz y Cara que indicaremos por XC
Cruz y Cruz que indicaremos por XX,

entonces el espacio muestral es : $E = \{CC, CX, XC, XX\}$

b) Si designamos por S el espacio de sucesos , se tiene :

$$S = \{\emptyset, \{CC\}, \{CX\}, \{XC\}, \{XX\},$$
$$\{CC,CX\}, \{CC,CX\}, \{CC,XX\}, \{CX,XC\}, \{CX,XX\}, \{XC,XX\}$$
$$\{CC,CX,XC\}, \{CC,CX,XX\}, \{CC,XC,XX\}, \{CX,XC,XX\}$$
$$\{CC,CX,XC,XX\}\}$$

El número de sucesos es $2^4 = 16$.

---oooOooo---

6.8. Consideremos el experimento que consiste en lanzar dos dados y ver los puntos. Decir por cuántos sucesos elementales estarán compuestos los sucesos siguientes :

a) $A = \{$sumar 10 puntos$\}$

b) $B = \{$sumar 6 puntos$\}$

c) $C = \{$sumar 11 puntos$\}$ (*JRV-VI-5*)

SOLUCION :

El espacio muestral viene dado por 36 resultados posibles :

$$E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

indicando por 11,12,... etc el resultado de sacar 1 en el primer dado y 1 en el segundo, 1 en el primero y 2 en el segundo , ... etc.

Los sucesos elementales son los elementos del espacio muestral. Los sucesos A, B y C son sucesos compuestos. Veamos de qué sucesos elementales.

a) $A = \{64\ ,\ 55\ ,\ 46\}$ ya que la suma de los puntos obtenidos por los dados es 10

b) $B = \{51\ ,\ 42\ ,\ 33\ ,\ 24,\ 15\}$, la suma, en este caso, de los puntos es 6

c) $C = \{65\ ,\ 56\}$, la suma debe ser aquí 11.

6.9. Interprétense los resultados que se pueden originar al arrojar dos dados al azar, a partir del concepto de producto cartesiano de dos conjuntos.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Los resultados de tirar dos dados son :

$$E = \{ \begin{array}{l} 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 \\ 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 \\ 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 \\ 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 \\ 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 \\ 61 , 62 , 63 , 64 , 65 , 66 \} \end{array}$$

donde, la primera cifra indica el resultado del primer dado y la segunda el resultado del segundo dado.

Siendo $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, el espacio muestral E se puede considerar como el producto cartesiano de U por U , es decir ,

$$E = U \times U = \{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$= \{ \begin{array}{l} (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6) \\ (2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) \\ (3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6) \\ (4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6) \\ (5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6) \\ (6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6)\} \end{array}$$

si quitamos los paréntesis y la coma de cada par resulta la escritura clásica de arriba.

Nótese que E viene dado por las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de dos en dos.

---oooOooo---

6.10. Consideremos el experimento que consiste en lanzar dos dados y anotar su suma. Formar el espacio muestral.

(JRV-VI-4)

SOLUCION :

Los resultados posibles son : 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 , luego el espacio muestral del experimento aleatorio dado es :

$$E = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

---oooOooo---

6.11. Se considera el experimento aleatorio de tirar tres dados al aire y anotar los puntos de las caras superiores.

Se pide :

a) El espacio muestral E.

b) Número de sucesos del espacio de sucesos S.

c) Elementos del suceso "sacar al menos dos cincos"

d) Elementos del suceso "sacar dos doses y un tres"

SOLUCION :

a) Indicaremos por "abc" uno cualquiera de los resultados de tirar tres dados siendo a,b, y c números que varía del 1 al 6.

Por tanto, el espacio muestral es :

E = {111,112,113,114,115,116,121,122,123,124,125,126, ... ,
..... , 651,652,653,654,655,656,661,662,663,664,665,666}

El número de elementos de E es :

Card(E) = posibilidades del primer dado .
posibilidades del segundo dado .
posibilidades del tercer dado
= 6 . 6 . 6 = 216

Se trata también de variaciones con repetición de 6 elementos (los resultados del dado) tomados de 3 en 3.

$$VR_{6,3} = 6^3 = 216$$

b) El número de sucesos del espacio de sucesos es : $Card(S) = 2^{216}$

c) Sea A el suceso "sacar al menos dos cincos" , entonces :

A = {551,552,553,554,555,556,515,525,535,545,565,155,255,355,455,655}

d) Sea B el suceso "sacar dos doses y un tres " , entonces

B = {223,232,322}

---oooOooo---

6.12. Hallar el espacio muestral asociado al experimento de lanzar simultáneamente cuatro monedas.

SOLUCION :

Indicaremos por "abcd" uno cualquiera de los resultados de lanzar las cuatro monedas, pudiendo tomar a,b,c y d cualquiera de los valores cara (C) o cruz (X)

Por tanto , el espacio muestral es :

E = {CCCC,CCCX,CCXC,CCXX,CXCC,CXCX,CXXC,CXXX ,
XCCC,XCCX,XCXC,XCXX,XXCC,XXCX,XXXC,XXXX}

6.13. ¿Cuáles son los elementos del suceso "suma de los puntos mayor o igual a 17" , si dichos puntos son los que aparecen en las caras superiores de tres dados arrojados al azar y simultáneamente?.

(*SELECTIVIDAD* - *1976*)

S O L U C I O N :

a) Los elementos del espacio muestral que se obtiene al tirar tres dados es :

E = {111,112,113,114,115,116, ... ,661,662,663,664,665,666}

en total 216 elementos.

b) Veamos cuáles son los elementos del suceso dado.

1°) La suma vale 18 puntos : Se obtiene de 666

2°) La suma vale 17 puntos : Se obtiene de 566 , 656 , 665

Por tanto , el suceso

"suma de los puntos mayor o igual a 17" = {666,566,656,665}

---oooOooo---

6.14. Determínense los sucesos elementales del espacio muestral determinado por cada uno de los siguientes experimentos aleatorios :

a) extracción al azar de dos bolas de una urna que contiene tres bolas blancas y dos bolas negras.(*Extracción sucesiva*)

b) el día de la semana en que ocurre un accidente de tráfico.

(*Selectividad* - *1975* --; *JRV-VI-11*)

S O L U C I O N :

a) Si indicamos por B sacar bola blanca y N sacar bola negra , entonces el espacio muestral es :

E = {BB , BN , NB , NN}

b) Ocurriendo accidentes de tráfico cualquier día de la semana , el espacio muestral de este experimento es :

E = {Lunes , Martes, Miércoles,Jueves,Viernes,Sábado,Domingo}

---oooOooo---

6.15. En cuatro fichas hemos escrito los números 1,1,2,2 (un número en cada ficha).Hallar el experimento de tomar a la vez dos fichas al azar.

S O L U C I O N :

Si designamos por "ab" el resultado de la extracción a la vez de dos fichas, siendo a y b letras que pueden tomar cualquiera de los valores 1 y 2, se tiene por tanto, el espacio muestral :

E = {11 , 22, 12}

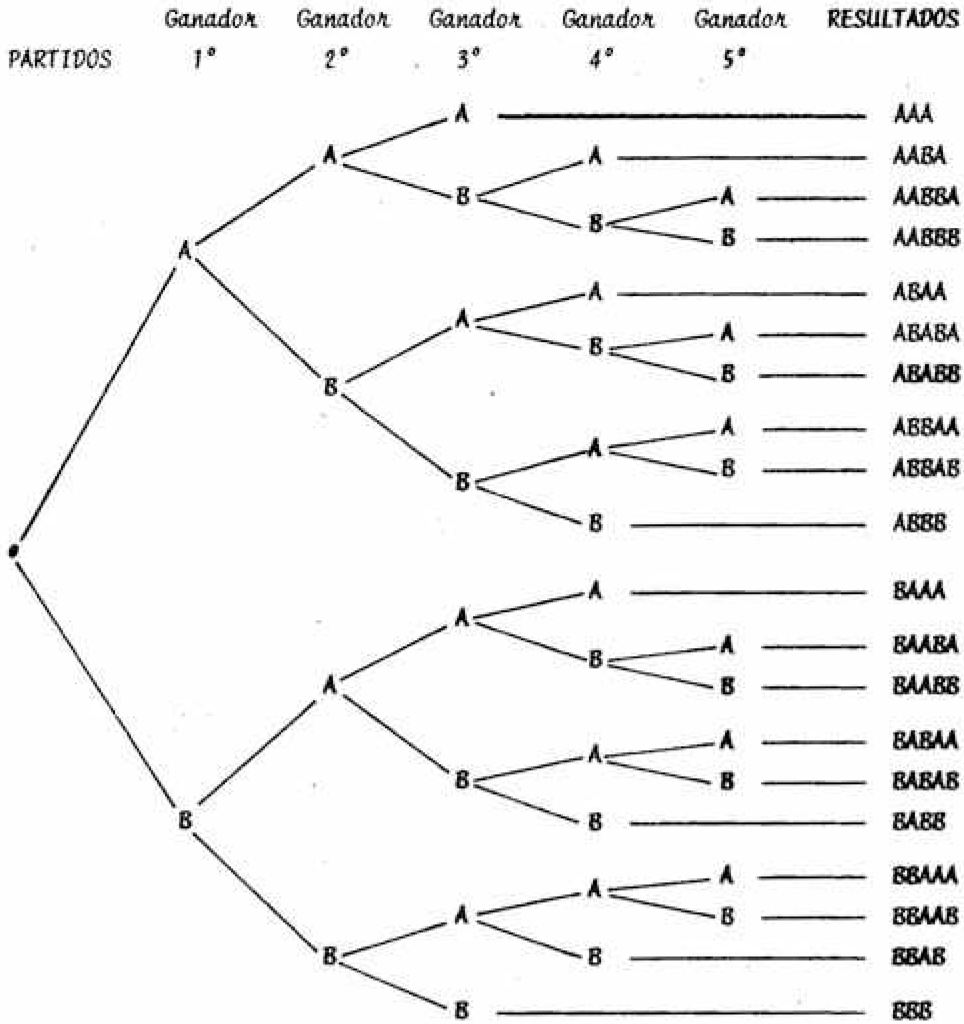
6.16. Los equipos de Argentina y Brasil disputan una serie de partidos de modo que se proclama campeón el primero que gane tres veces.

Hallar el espacio muestral de los resultados posibles.

SOLUCION :

Designaremos por A Argentina y por B Brasil

El diagrama en árbol de los resultados posibles es el siguiente :



El espacio muestral consta, como se ve, de 20 elementos. En 10 casos aparece campeón Argentina y en otros 10 casos Brasil.

---oooOooo---

6.17. Consideremos el experimento consistente en extraer tres tornillos de una caja y ver cuáles son defectuosos y buenos.

Se pide :

a) El espacio muestral E y el número de elementos de que consta.

b) Elementos del suceso "el último tornillo es defectuoso"

c) Elementos del suceso "al menos dos tornillos son defectuosos".

SOLUCION :

a) Si designamos por "abc" el resultado de una extracción , siendo a,b, y c letras que pueden tomar los valores B = bueno y D = defectuoso , entonces el espacio muestral es :

$$E = \{BBB\ ,\ BBD\ ,\ BDB\ ,\ BDD\ ,\ DBB\ ,\ DBD\ ,\ DDB\ ,\ DDD\} \quad y\ Card(E) = 8$$

b) Sea A el suceso "el último tornillo es defectuoso" , entonces :

$$A = \{BBD\ ,\ BDD\ ,\ DBD\ ,DDD\}$$

c) Sea B el suceso "al menos dos tornillos son defectuosos" , entonces

$$B = \{BDD\ ,\ DBD\ ,\ DDB\ ,\ DDD\}$$

---oooOooo---

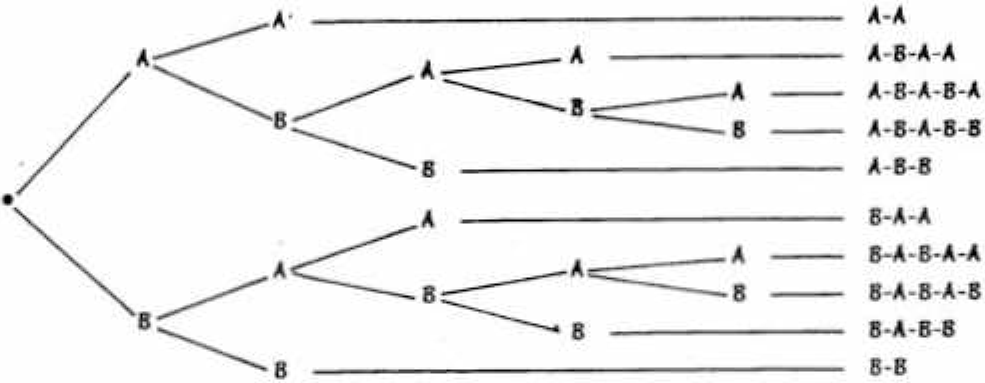
6.18. Antonio y Basilio son los finalistas de un torneo de tenis.Gana el torneo quien gane dos juegos seguidos o tres alternos.Hallar el espacio muestral de los resultados posibles.

SOLUCION :

Indicaremos por A el suceso "ganar Antonio" y

por B el suceso "ganar Basilio" = "perder Antonio"

El siguiente diagrama en árbol muestra los diferentes resultados posibles :



Por tanto , el espacio muestral es :

E = {AA, ABAA,ABABA,ABABB,ABB,BAA,BABAA,BABAB, BABB,BB}

6.19. Una urna contiene bolas negras y blancas (el número de bolas mayor que 3). Se sacan **sucesivamente** tres bolas de la urna. Se pide :

a) El espacio muestral E del experimento.

b) Elementos del suceso "sacar al menos una bola negra"

c) Elementos del suceso "sacar las tres bolas del mismo color".

SOLUCION :

a) Si designamos por "abc" el resultado de la realización del experimento, siendo a,b,c cualquiera de los resultados bola negra (N) o bola blanca (B), entonces el espacio muestral es :

$$E = \{NNN\ ,\ NNB\ ,\ NBN\ ,\ NBB\ ,\ BNN\ ,\ BNB\ ,\ BBN\ ,\ BBB\}$$

b) Si A es el suceso "sacar al menos una bola negra" ,entonces

$$A = \{NNN\ ,\ NNB\ ,\ NBN\ ,\ NBB\ ,\ BNN\ ,\ BNB\ ,\ BBN\}$$

c) Si B es el suceso "sacar las tres bolas del mismo color" , entonces

$$B = \{NNN\ ,\ BBB\}$$

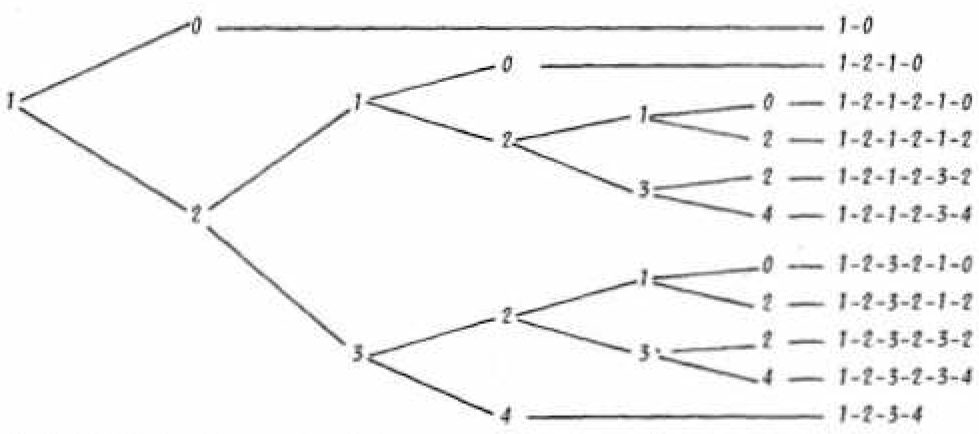
---oooOooo---

6.20. Un hombre tiene tiempo para jugar a la ruleta 5 veces a lo sumo. Cada apuesta es de 100 pesetas. El hombre empieza con 100 pesetas y dejará de jugar cuando pierda las 100 pesetas o gane 300 pesetas. Hallar el espacio muestral de los resultados posibles.

SOLUCION :

El siguiente diagrama en árbol muestra los resultados posibles del juego:

EMPIEZA CON 1ª.jugada 2ª.jugada 3ª 4ª. 5ª. RESULTADOS



donde 1,2,3,4 y 0 expresan el dinero que tiene en cada momento en cientos de pesetas. Por tanto, el espacio muestral es :

$$E = \{10,1210,121210,121212,121232,121234,123210,123212,123232,123234,1234\}$$

6.21. Se considera el experimento consistente en lanzar un dado y anotar el número de la cara superior.

Sean los sucesos A "sacar un múltiplo de 3"
B "sacar un número primo"
C "sacar un número par".

¿Son compatibles los sucesos A y B ,A y C o B y C?.

SOLUCION :

Veamos cómo se expresan los sucesos dados en función de los elementos del espacio muestral.

A = "sacar un múltiplo de 3" = $\{3,6\}$

B = "sacar un número primo" = $\{2,3,5\}$

C = "sacar un número par" = $\{2,4,6\}$

a) $A \cap B = \{3\}$, luego A y B son compatibles.

b) $A \cap C = \{6\}$, luego A y C son compatibles.

c) $B \cap C = \{2\}$, luego B y C son compatibles.

---oooOooo---

6.22. Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y de un dado.

Sí A es el suceso "cara en el lanzamiento de la moneda" y
B es el suceso "obtener 3 o 6 en el dado" ,
explicar el significado de los siguientes sucesos :

1°) $\bar{A}$
2°) $\bar{B}$
3°) $A \cap B$
4°) $A \cap \bar{B}$
5°) $\bar{A} \cup \bar{B}$
6°) $\bar{A} \cap \bar{B}$

(JRV-VI-9)

SOLUCION :

1°) $\bar{A}$ es el suceso "no sacar cara en el lanzamiento de la moneda".

2°) $\bar{B}$ es el suceso "no sacar ni 3 ni 6 en el dado".

3°) $A \cap B$ es el suceso "sacar cara en el lanzamiento de la moneda y obtener 3 o 6 en el dado".

4°) $A \cap \bar{B}$ es el suceso " sacar cara con la moneda y no sacar ni 3 ni 6 con el dado".

5°) $\bar{A} \cup \bar{B}$ es el suceso "no sacar cara en el lanzamiento de la moneda o no sacar ni 3 ni 6 en el dado"

6°) $\bar{A} \cap \bar{B}$ es el suceso "no sacar cara en el lanzamiento de la moneda y no sacar ni 3 ni 6 en el dado".

---oooOooo---

6.23. Hallar la unión y la intersección de los siguientes sucesos que se obtienen al lanzar un dado :

1) A = {sacar número par}
2) B = {sacar número no inferior a cuatro}

(Selectividad - 1975 - JRV - VI - 12)

SOLUCION :

Los sucesos A y B se expresan en función de los sucesos elementales , de la siguiente forma :

$A = \{\text{sacar número par}\} = \{2,4,6\}$

$B = \{\text{sacar número no inferior a cuatro}\} = \{4,5,6\}$

a) La unión de los sucesos es :

$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{4,5,6\} = \{2,4,5,6\}$

b) La intersección de los sucesos es :

$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$

---oooOooo---

6.24. Consideremos los sucesos A,B y C del espacio de sucesos S. Se pide expresar en función de los sucesos A,B y C y de sus complementarios $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los siguientes sucesos :

a) Se realizan A y C pero no B
b) Se realiza al menos uno de los tres
c) Se realizan al menos dos sucesos de los dados
d) No se realiza ninguno de los tres sucesos
e) Se realiza A , pero no se realiza B y C

SOLUCION :

a) $(A \cap B) - B = (A \cap B) \cap \bar{B}$, por la definición de -

b) Este suceso se realiza cuando se realiza el suceso A , o el suceso B , o el suceso C , por tanto , será el suceso :

$A \cup B \cup C$

c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

d) Este suceso es complementario del suceso dado en b), por tanto,

$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap (\overline{B \cup C}) = \bar{A} \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

e) El sucesos es :

$A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C})$, por la definición de -

$= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C})$, por la ley de Morgan

$= A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, por la asociatividad de $\cap$

6.25. Se considera el experimento consistente en lanzar un dado al aire y anotar el número de la cara superior. Se pide :

a) El espacio muestral

b) Dar un sistema completo de sucesos

c) Hallar los sucesos contrario de los del sistema anterior

d) Comprobar si los sucesos obtenidos en c) forman un sistema completo de sucesos.

S O L U C I O N :

a) El espacio muestral es : $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) Un sistema completo es : $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4,6\}$

c) $\bar{A} = B$ y $\bar{B} = A$

d) Los sucesos obtenidos en c) forman un sistema completo de sucesos.

Veamos que esto no siempre es cierto :

b) Sea ahora el sistema $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3,4,5,6\}$

c) Los sucesos contrarios son : $\bar{A} = \{2,3,4,5,6\}$, $\bar{B} = \{1,3,4,5,6\}$, $\bar{C} = \{1,2\}$

d) Los sucesos $\bar{A}, \bar{B}$ y $\bar{C}$ no forman un sistema puesto que no son incompatibles dos a dos.

---oooOooo---

6.26. De una urna que contiene 2 bolas rojas y tres azules se extraen simultáneamente dos bolas, ¿cuáles son los elementos de $A \subset E$ si A es el suceso "haber extraido al menos una bola azúl" y E el espacio muestral?.

(SELECTIVIDAD -1976)

S O L U C I O N :

El espacio muestral E es : $E = \{(roja,roja),(roja,azul),(azul,azul)\}$

Nótese que (azul,roja) es la misma extracción que (roja,azul) por ser la extracción simulténea.

Por tanto,

A = "haber extraido al menos una bola azul" = $\{(azul,roja),(azul,azul)\}$

---oooOooo---

6.27. Hallar el espacio muestral asociado al experimento aleatorio de sacar a la vez dos monedas de una bolsa que contiene una moneda de 5 ptas, otra de 25 ptas y otra de 50 ptas.

S O L U C I O N :

El espacio muestral E es el siguiente :

$$E = \{(5,25) , (5,50) , (25,50)\}$$

6.28. Se considera el experimento consistente en lanzar tres monedas al aire y anotar el resultado de la cara superior.
Se pide :

a) El espacio muestral y el número de elementos del mismo.

b) Elementos del suceso "sacar al menos dos caras",

c) Elementos del suceso "sacar solamente dos cruces"

SOLUCION :

a) Si designamos por "abc" el resultado de la realización de un experimento, siendo a,b, y c cualquiera de los resultados Cara (C) o Cruz (X), entonces el espacio muestral es :

$$E = \{CCC , CCX , CXC , CXX , XCC , XCX , XXC , XXX\}$$

El número de elementos es evidentemente 8.

b) Sea A el suceso "sacar al menos dos caras" , entonces

$$A = \{CCC , CCX , CXC , XCC\}$$

c) Sea B el suceso "sacar solamente dos cruces" , entonces

$$B = \{CXX , XCX , XXC\}$$

---oooOooo---

6.29. Se considera el suceso A "sacar un rey" y B el suceso "sacar una figura" en la extracción de una carta de una baraja española.¿Cuál de las dos siguientes expresiones es cierta ?:

a) $A \subset B$

b) $B \subset A$

Razonar la contestación.

SOLUCION :

a) Es cierta la primera relación, es decir , $A \subset B$, puesto que ,

- ser rey implica ser figura, o también
- el subconjunto de los reyes está contenido en el subconjunto de las figuras.

---oooOooo---

6.30. Se realiza la experiencia :"Elegir una ficha de dominó" y se dice que se ha realizado A_i si la suma total de puntos es i. ¿Cuál es el espacio muestral?.

SOLUCION :

El espacio muestral es $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ puesto que la suma de los puntos varía de 0 a 12.

6.31. Un experimento consiste en la extracción de tres cartas de una baraja española.

Sean A el suceso "sacar rey en la primera extracción",
B el suceso "sacar rey en la segunda extracción", y
C el suceso "sacar rey en la tercera extracción".

Explicar el significado de los siguientes casos :

1°) $A \cap \bar{B}$
2°) $A \cup B$
3°) $\bar{A} \cup \bar{B}$
4°) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
5°) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C}$
6°) $B \cup \bar{C}$

[JRV-VI-8]

SOLUCION :

1°) $A \cap \bar{B}$ es el suceso "sacar rey en la primera extracción y no sacar rey en la segunda extracción".

2°) $A \cup B$ es el suceso "sacar rey en la primera extracción o sacar rey en la segunda extracción".

3°) $\bar{A} \cup \bar{B}$ es el suceso "no sacar rey en la primera extracción o no sacar rey en la segunda extracción".

4°) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ es el suceso "no sacar rey en la primera extración ni en la segunda ni en la tercera".

5°) $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \bar{C}$ es el suceso "no sacar rey en la primera o en la segunda extracción y no sacar en la tercera".

6°) $B \cup \bar{C}$ es el suceso "sacar rey en la segunda extracción o no sacar rey en la tercera extracción".

---oooOooo---

6.32. Simplifíquese la siguiente expresión de sucesos :

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$$

donde $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios de A y B respectivamente.

[SELECTIVIDAD -1976]

SOLUCION :

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) &= ((A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup B) && \text{, p. asociativa} \\
&= (A \cup (B \cap \bar{B})) \cap (\bar{A} \cup B) && \text{, p. distributiva} \\
&= (A \cup \emptyset) \cap (\bar{A} \cup B) && \text{, p. de complementación} \\
&= A \cap (\bar{A} \cup B) && \text{, identidad} \\
&= (A \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) && \text{, p. distributiva} \\
&= \emptyset \cup (A \cap B) && \text{, p. de complementación} \\
&= A \cap B && \text{, identidad}
\end{aligned}$$

6.33. Consideremos el experimento consistente en extraer una carta de la baraja española.

Sean A el suceso "extraer un as",

B el suceso "extraer un oro" , y

C el suceso "extraer el as de copas".

Explicar el significado de cada uno de los siguientes sucesos:

1°) $\bar{A}$	5°) $A \cap B$	9°) $A \cap B \cap C$
2°) $\bar{B}$	6°) $\bar{A} \cup \bar{B}$	10°) $\overline{A \cap B \cap C}$
3°) $\bar{C}$	7°) $A \cap C$	11°) $\overline{A \cup B} \cap C$
4°) $A \cup B$	8°) $A \cap \bar{C}$	12°) $A \cap \overline{B \cap C}$

(JRV-VI-10)

S O L U C I O N :

1°) $\bar{A}$ es el suceso "no extraer un as"

2°) $\bar{B}$ es el suceso "no extraer un oro"

3°) $\bar{C}$ es el suceso "no extraer el as de copas"

4°) $A \cup B$ es el suceso "extraer un as o un oro"

5°) $A \cap B$ es el suceso "extraer un as y extraer un oro" = "extraer el as de oros"

6°) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$ es el suceso "no extraer el as de oros"

7°) $A \cap C$ es el suceso "extraer un oro y extraer un as de copas" = $\emptyset$, es,por tanto , el suceso imposible.

8°) $A \cap \bar{C}$ es el suceso "extraer un oro y no extraer un as de copas" = "extraer un oro"

Nótese que $A \subset \bar{C}$

9°) $A \cap B \cap C$ es el suceso "extraer un oro y un as y as de copas" = $\emptyset$ = "suceso imposible"

10°) $\overline{A \cap B \cap C}$ es el suceso cierto puesto que es el complementario del suceso imposible (Ver 9°)) $A \cap B \cap C$

11°) $\overline{A \cup B} \cap C = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C = \emptyset$ puesto que "no extraer un as" y extraer un as de copas" son sucesos incompatibles.

12°) $A \cap \overline{B \cap A} = A \cap \bar{\emptyset}$, ya que B y C son sucesos incompatibles

$= A \cap E$, donde E es el suceso cierto

$= A$ es el suceso "extraer un as".

---oooOooo---

6.34. Se ha observado la distribución por sexo de los hijos en familias de tres hijos.

Sean A el suceso "el hijo mayor es un varón" y

B el suceso "los dos hijos pequeños son varones".

¿Cuáles son los elementos de A y de B?.

(*Selectividad -1975-JRV-VII-18*)

SOLUCION:

Si designamos por V el hijo varón y por H hijo hembra, y los nombramos de mayor a menor, se tiene:

A = {VVV , VVH , VHV , VHH}

(ya que en cada uno de estos sucesos elementales el hijo mayor es varón)

B = {VVV , HVV}

(ya que en cada uno de estos sucesos elementales los dos hijos menores son varones).

---oooOooo---

7 PROBABILIDAD

en el que se desarrollan las siguientes materias:

1. FRECUENCIAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS
2. DEFINICION CLASICA DE PROBABILIDAD
3. DEFINICION AXIOMATICA DE PROBABILIDAD
4. PROBABILIDAD CONDICIONADA
5. PROBABILIDADES TOTALES Y COMPUESTAS
6. SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

7. 1. Lanzar una moneda 100 veces y anotar los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál será la frecuencia absoluta del suceso "cara"?.

b) ¿Y la frecuencia relativa?.

SOLUCION : (JRV-VII-1)

Hemos realizado el experimento y se han obtenidos los siguientes resultados :

1) Número de caras que han salido = 48

2) Número de cruces que han salido = 52

Con estos resultados se tiene :

a) La frecuencia absoluta del suceso "cara" = 48

b) La frecuencia relativa del suceso "cara" = 48/100

---oooOooo---

7. 2. Extráigase de una baraja española todos los oros. Considerando este montón , hágense 50 extracciones con reemplazamiento y anótense los resultados. (JRV-VII-2)

SOLUCION :

Hemos realizado el experimento,procurando barajar bien las cartas,y se han obtenido los siguientes resultados :

As de oros	4	cuatro de oros	5	siete de oros	6
dos de oros	5	cinco de oros	3	sota de oros	4
tres de oros	6	seis de oros	7	caballo de oros	6
				rey de oros	4

NOTA : *Obsérvese que las frecuencias tienden a estabilizarse en torno al* 5.

---oooOooo---

7. 3. ¿Cuánto valen la suma de todas las frecuencias relativas de los sucesos elementales de un experimento aleatorio?

SOLUCION : (JRV-VII-3)

Los sucesos elementales de un experimento aleatorio es un sistema completo de sucesos, es decir, es una partición del espacio muestral.

De otro modo : a) Dos sucesos cualesquiera son incompatibles y

b) la unión de todos los sucesos es el suceso cierto.

Entonces , la suma de las frecuencias relativas vale 1.En efecto :

Sea $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el espacio muestral y $n_1, n_2, \ldots, n_n$ las frecuencias absolutas al realizar el experimento n veces.Se tiene , entonces ,

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_n}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

7. 4. Un experimento consiste en extraer una bola de una urna que contiene una bola azul, 2 blancas y 3 rojas. Sea $E = \{a,b,r\}$ el correspondiente espacio muestral y S el conjunto de las partes del conjunto E, es decir,

$$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{r\}, \{a,b\}, \{a,r\}, \{b,r\}, E\}$$

Se define una función p sobre S de la siguiente manera :

$p(\emptyset) = 0$, $p(\{a\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{b\}) = \frac{1}{3}$, $p(\{r\}) = \frac{1}{2}$,

$$p(\{a,b\}) = \frac{1}{2} , \ p(\{a,r\}) = \frac{2}{3} , \ p(\{b,r\}) = \frac{5}{6}$$

$p(E) = 1$

¿Es p una probabilidad?.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

Para que la función p definida sobre S, espacio de sucesos, sea una probabilidad, debe verificar los axiomas siguientes :

Ax-1 : $p(\emptyset) = 0$

Ax-2 : $p(E) = 1$

Ax-3 : Si $A,B \in S$ son tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Veamos si se verifican estos axiomas.

Ax-1 : $p(\emptyset) = 0$, por definición de p

Ax-2 : $p(E) = 1$, por definición de p

Ax-3 : 1°) Sean $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, son tales que $A \cap B = \emptyset$ y

$p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = p(\{a,b\})$, y como $\{a,b\} = A \cup B$

estos sucesos verifican el axioma 3.

2°) Sean $A = \{a\}$, $B = \{r\}$, son tales que $A \cap B = \emptyset$ y

$p(\{a\}) + p(\{r\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = p(\{a,r\})$, y como $\{a,r\} = A \cup B$

estos sucesos verifican el axioma 3

3°) Sean $A = \{b\}$, $B = \{r\}$, estos sucesos son tales que $A \cap B = \emptyset$ y

$p(\{b\}) + p(\{r\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = p(\{b,r\})$, y como $\{b,r\} = A \cup B$

estos sucesos también verifican el axioma 3.

De lo anterior se sigue que la función p es una probabilidad en S y (E,S,p) un espacio probabilístico.

NOTA : *Una función de probabilidad queda también determinada conociendo las imágenes de los sucesos elementales.*

Los sucesos elementales forman una base del Algebra de sucesos.

---oooOooo---

7.5. Sea $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ un espacio muestral. Se definen las siguientes funciones de E en $\mathbb{R}$ (números reales) :

1) $p(a_1) = \frac{1}{2}$, $p(a_2) = \frac{1}{3}$, $p(a_3) = \frac{1}{4}$, $p(a_4) = \frac{1}{5}$
2) $p(a_1) = \frac{1}{2}$, $p(a_2) = -\frac{1}{2}$, $p(a_3) = \frac{1}{2}$, $p(a_4) = \frac{1}{5}$
3) $p(a_1) = 0$, $p(a_2) = 0$, $p(a_3) = \frac{1}{2}$, $p(a_4) = \frac{1}{2}$
4) $p(a_1) = \frac{1}{4}$, $p(a_2) = \frac{1}{2}$, $p(a_3) = 0$, $p(a_4) = \frac{1}{4}$
5) $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) = 0$, $p(a_4) = 1$

¿Cuáles de estas funciones definen una probabilidad en E?.

SOLUCION :

1) La suma de $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$, $p(a_4)$ es mayor que 1 , luego p no define una probabilidad.

2) $P(a_2) = -\frac{1}{2}$, y como la probabilidad de un suceso es siempre mayor o igual que cero , se sigue que p no define aquí una probabilidad.

3) La función p define aquí una probabilidad puesto que la suma de los valores es 1 y son no negativos.

4) Los valores son no negativos , y su suma es 1, luego definen una probabilidad sobre E

5) p también es aquí una probabilidad, puesto que los valores que toman los sucesos elementales son no negativos y su suma es 1.

---oooOooo---

7.6. Se lanzan dos monedas al aire.Determinar la probabilidad de que se obtengan dos caras.

(SELECTIVIDAD -1976)

SOLUCION :

Si se lanzan dos monedas al aire los casos posibles o resultados posibles son:

CC , CX , XC , XX

indicando por C cara y por X cruz.

El único caso favorable es : CC.

Por tanto,la probabilidad es : $p(CC) = \frac{1}{4}$

OTRO METODO :

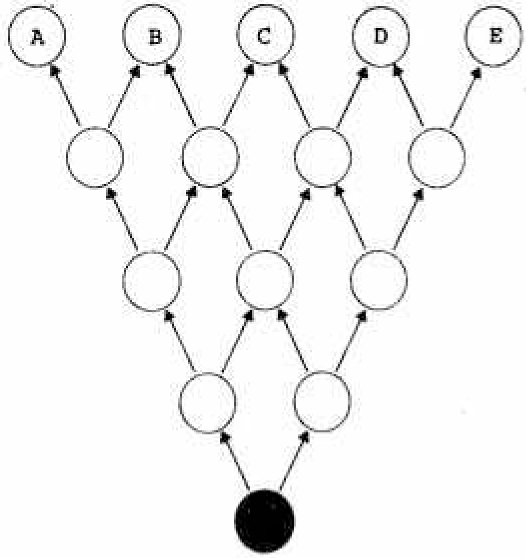
Sea A el suceso "sacar cara en la primera moneda" y

B el suceso "sacar cara en la segunda moneda" , entonces el suceso

CC "sacar cara en la primera y en la segunda moneda" es la intersección de los sucesos A y B. Por ser sucesos independientes se tiene :

$$p(CC) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

7.7. Consideremos el siguiente juego.Una ficha puede avanzar a partir del punto negro en las direcciones indicadas por las flechas según los resultados par o impar que se obtienen al tirar un dado.



Se pide :

a) ¿Cuántos caminos distintos puede seguir la ficha hasta el final?

b) ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de ellos?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha llegue a cada uno de los círculos superiores despues de 4 jugadas?.

S O L U C I O N :

a) Los caminos a seguir hasta llegar a cada uno de los círculos son :

1		4		6		4		1	4ª fila de círculos
	1		3		3		1		3ª fila de círculos
		1		2		1			2ª fila de círculos
			1		1				1ª fila de círculos
				0					

Cuando se termina el juego el número de caminos posibles es :

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

b) Todos los caminos tienen la misma probabilidad, luego su valor es $\frac{1}{16}$

c) La probabilidad de llegar a cada círculo depende del número de caminos posibles. En a) se ha señalado los caminos posibles. Por tanto,

probabilidad de llegar a A = 1/16

probabilidad de llegar a B = 4/16

probabilidad de llegar a C = 6/16

probabilidad de llegar a D = 4/16

probabilidad de llegar a E = 1/16

NOTA : De una manera análoga se calcula la probabilidad de llegar a cada uno de los círculos.

---oooOooo---

7.8. Sean A y B dos de los posibles sucesos que pueden presentarse en un experimento aleatorio. Probar que si A y B son sucesos independientes, entonces también lo son sus sucesos contrarios $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

Sabemos que dos sucesos son independientes si ,

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Se trata, por tanto, de demostrar que ,

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}).p(\bar{B})$$

En efecto,

$$\begin{aligned} p(\bar{A} \cap \bar{B}) &= p(\overline{(A \cup B)}) && \text{, ley de Morgan} \\ &= 1 - p(A \cup B) \\ &= 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) \\ &= 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B) && \text{, A y B independientes} \\ &= (1 - p(A))(1 - p(B)) \\ &= p(\bar{A}).p(\bar{B}) \end{aligned}$$

luego, los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son sucesos independientes.

---oooOooo---

7.9. Sean S un espacio de sucesos, A y B elementos de S y p una medida de probabilidad en S.

Se sabe que $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.7$ y $p(A \cup B) - p(A \cap B) = 0.3$.

Calcular $p(A \cup B)$ y $p(A \cap B)$.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

Sabemos que dados dos sucesos de S , A y B , se verifica la siguiente relación:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\iff \quad p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

De esta última fórmula y de la relación dada en el enunciado, se obtiene el siguiente sistema :

$$\begin{cases} p(A \cup B) + p(A \cap B) = 0.6 + 0.7 = 1.3 \\ p(A \cup B) - p(A \cap B) = 0.3 \end{cases}$$

1°) Sumando las dos ecuaciones , resulta :

$$2p(A \cup B) = 1.6 \quad \Rightarrow \quad p(A \cup B) = 0.8$$

2°) Restando las dos ecuaciones, resulta :

$$2p(A \cap B) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(A \cap B) = 0.5$$

7.10. Hallar la probabilídad de sacar al menos una cara en n lanzamientos consecutívos de una moneda.

[*Selectividad* - 1975 -JRV-VII-19]

SOLUCION :

Sean A el suceso "sacar al menos una cara en n lanzamientos de una moneda"

XXX ... X el suceso "sacar n cruces en n lanzamientos de una moneda"; entonces los sucesos A y XXX...X son sucesos contrarios . Por tanto :

$$p(A) = 1 - p(XXX \dots X)$$
$$= 1 - p(X).p(X).p(X). \dots .p(X)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

---oooOooo---

7.11. Sean A y B dos sucesos de un espacío de sucesos S, tal que $p(A) = 3/8$, $p(B) = 1/2$ y $p(A \cap B) = 1/4$. Se pide :

1) $p(A \cup B)$
2) $p(\bar{A})$, 3) $p(\bar{B})$
4) $p(\bar{A} \cap \bar{B})$, 5) $p(\bar{A} \cup \bar{B})$
6) $p(A \cap \bar{B})$, 7) $p(B \cap \bar{A})$
8) $p(A \triangle B)$

SOLUCION :

1) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$

2) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

3) $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4) $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

5) $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

6) $p(A \cap \bar{B}) = p(A - B) = p(A - (A \cap B)) = p(A) - p(A \cap B)$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

7) $p(B \cap \bar{A}) = p(B - A) = p(B - (A \cap B)) = p(B) - p(A \cap B)$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

8) $p(A \triangle B) = p((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}))$, por definición de diferencia

$= p(A \cap \bar{B}) + p(B \cap \bar{A})$, por ser $A \cap \bar{B}$ y $B \cap \bar{A}$ incompatibles.

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

7.12. Una urna contiene 36 bolas numeradas del 1 al 36. Se extraen simultáneamente dos de dichas bolas y se vuelven a introducir en la urna; posteriormente se saca otro par de bolas (también simultáneamente). Hallar la probabilidad del suceso consistente en que los números que se obtienen en la primera extracción no sumen 36, y que además, el producto de los números obtenidos en la segunda extracción no sea 36.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

SOLUCION:

Sean A "los dos números obtenidos en la primera extracción no suman 36"

B "los dos números obtenidos en la segunda extracción tienen un producto distinto de 36"

Los sucesos A y B son evidentemente independientes, por tanto

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

a) Cálculo de la probabilidad de A.

Aplicaremos la regla de Laplace :

1°) Casos posibles de extraer dos bolas : $\binom{36}{2} = \frac{36.35}{1.2} = 630$

2°) Casos favorables;

La primera bola es el 1 : Las parejas que cumplen la condición varían entonces del 1-2 al 1-34, en total : 33

La primera bola es el 2 : Varían del 2-3 al 2-33 , en total : 31

La primera bola es el 3 : Varían del 3-4 al 3-32 , en total : 29

La primera bola es el 4 : Varían del 4-5 al 4-31 , en total : 27

... ...

La primera bola es el 16 : Varían del 16-17 al 16-19, en total : 3

La primera bola es el 17 : La única pareja es la 16-17 , 1

Por tanto, el número total de parejas viene dado por :

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 27 + 29 + 31 + 33 = 289$

$p(A) = \frac{289}{630}$

b) Cálculo de la probabilidad de B.

1°) Casos posibles = 630 (los mismos que en a)-1°))

2°) Casos favorables = 630 - 5 = 625 , puesto que 1-36 ,18-2 ,12-3 ,9-4 y 6-6 son los casos desfavorables del suceso B

$p(B) = \frac{625}{630}$

De a) y b) se sigue que : $p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{289}{630} \cdot \frac{625}{630} = 0.455$

---oooOooo---

7.13. Hallar la probabilidad de obtener dos caras y 4 cruces al lanzar 6 monedas sobre una mesa.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

En el lanzamiento de una moneda los resultados son dos : Cara (C) y Cruz (X).
Su probabilidades son :

$$p(C) = p(X) = \frac{1}{2}$$

Vamos a calcular la probabilidad del suceso pedido por la "regla de Laplace".

a) Casos posibles.

Cada moneda tiene dos posibilidades, luego el número de resultados posibles con las 6 es :

Número de casos posibles = $2.2.2.2.2.2 = 2^6 = 64$

b) Caso favorables.

Un resultado favorable es : C C X X X X

o también : X C X C X X

Es evidente que los casos posibles vienen dados por las permutaciones con repetición de 6 elementos de los cuales uno se repite 2 veces y otro 4.

Número de casos favorables : $P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!.2!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4.1.2} = 15$

De a) y b) se sigue que la probabilidad es :

Probabilidad de obtener 2 caras y 4 cruces = $\frac{15}{64}$

---oooOooo---

7.14. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos de las caras visibles de un dado que se lanzó al azar, sea múltiplo de 5.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Las sumas que se pueden obtener son :

El 1 no es visible : $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 = \dot{5}$

El 2 no es visible : $1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 19 \neq \dot{5}$

El 3 no es visible : $1 + 2 + 4 + 5 + 6 = 18 \neq \dot{5}$

El 4 no es visible : $1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17 \neq \dot{5}$

El 5 no es visible : $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 \neq \dot{5}$

El 6 no es visible : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \dot{5}$

Por tanto , - casos favorables = 2

- casos posibles = 6

- probabilidad de que la suma sea múltiplo de 5, $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

7.15. Hallar la probabilidad de un suceso, sabiendo que la suma de su cuadrado y la del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es igual a $\frac{5}{9}$.

(SELECTIVIDAD -1976)

SOLUCION :

Sea A el suceso y x su probabilidad , es decir , $p(A) = x$.

Entonces el suceso contrario , $\bar{A}$, tiene por probabilidad :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - x$$

El enunciado del problema se traduce en la siguiente ecuación :

$$x^2 + (1 - x)^2 = \frac{5}{9} \iff$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = \frac{5}{9} \iff$$

$$18x^2 - 18x + 9 = 5 \iff$$

$$18x^2 - 18x + 4 = 0 \iff$$

$$9x^2 - 9x + 2 = 0$$

Y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante, se tiene:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

y $x_2 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Por tanto, $p(A) = \frac{2}{3}$, o también $p(A) = \frac{1}{3}$.

---oooOooo---

7.16. Hallar la probabilidad de obtener "al menos un 3" en dos lanzamientos de un dado.

(JRV-VII-11)

SOLUCION :

Sean A el suceso "sacar un 3 en el primer dado" y

B el suceso "sacar un 3 en el segundo dado" , entonces el suceso

C "obtener al menos un 3 en dos lanzamientos de un dado" es la unión de los sucesos A y B , es decir, $C = A \cup B$.

Por tanto ,

$$p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Veamos ahora como se resuelve este problema por la "regla de Laplace".

a) Los resultado posibles al tirar dos dados son 36.

b) Los resultados favorables al suceso C son :

31,32,33,34,35,36 , 13,23, 43,53,63

Luego, $p(C) = \frac{11}{36}$

7.17. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 9 o 10 puntos con dos dados?

(*SELECTIVIDAD -1976*)

S O L U C I O N :

Sean A el suceso "sacar 9 puntos con dos dados" y

B el suceso "sacar 10 puntos con dos dados" , los sucesos A y B se pueden expresar entonces así:

$A = \{63 , 54 , 45 , 36\}$

$B = \{64 , 55 , 46\}$

Siendo l' ado posibles, al tirar dos dados, 36 , se tiene que :

a) Prot del suceso A : $p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

b) Probabilidad del suceso B : $p(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

c) Como los sucesos A y B son sucesos incompatibles , la probabilidad pedida será :

$$p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$$

NOTA: *Nótese que ,*

A o B = $\{63 , 54 , 45 , 36 , 64 , 55 , 46\}$

y aplicando la "regla de Laplace" obtenemos el resultado anterior.

---oooOooo---

7.18. Se ha trucado una moneda de tal forma que la probabilidad de obtener cara es triple que la probabilidad de obtener cruz. ¿Cuál es la probabilidad de cada suceso "cara" y "cruz"?.

S O L U C I O N :

Sean C el suceso "obtener cara" y

X el suceso "obtener cruz", entonces se tiene :

a) $C \cap X = \emptyset$, es decir, C y X son sucesos incompatibles.

b) $p(C) = 3p(X)$

c) $p(C \cup X) = P(C) + p(X) - p(C \cap X)$

d) $C \cup X = E$, siendo E el suceso cierto.

De estas relaciones se sigue :

$$\begin{aligned} 1 = p(E) = p(C \cup X) &= p(C) + p(X) - p(C \cap X) \\ &= p(C) + p(X) \\ &= 3p(X) + p(X) \\ &= 4p(X) \end{aligned}$$

, de donde $p(X) = \frac{1}{4}$, y por tanto,

$p(C) = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

7.19. Hallar la probabilidad de que los puntos obtenidos al lanzar tres dados,

a) sumen 3

b) sumen un múltiplo de 3.

(SELECTIVIDAD - 1975)

SOLUCION :

a) Sea A el suceso "suma de los puntos de los tres dados es 3" , entonces

$A = \{111\}$, es decir, en los tres dados se debe obtener 1.

$$p(A) = p(111) = p(1).p(1).p(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Nótese que los casos favorables son 1 y los casos posibles son 216.

b) Sea B el suceso "suma de los puntos de los tres dados múltiplo de 3" , entonces

1) resultados cuya suma es 3 : 111

2) resultados cuya suma es 6 : 114 , 141 , 411
123 , 132 , 213 , 231 , 312 , 321

3) resultados cuya suma es 12 : 651 , 615 , 516 , 562 , 156 , 165
642 , 624 , 426 , 462 , 246 , 264
633 , 363 , 336
552 , 525 , 255
543 , 534 , 435 , 453 , 354 , 345
444

4) resultados cuya suma es 18 : 666

Por tanto, casos favorables : 36
casos posibles : 216

$$p(B) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

---oooOooo---

7.20. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres ases (tres 1) al lanzar tres dados?

(JRV-VII-7)

SOLUCION :

Sean A el suceso "sacar as en el primer dado"

B el suceso "sacar as en el segundo dado"

C el suceso "sacar as en el tercer dado" , entonces la probabilidad del suceso intersección "A y B y C" es :

$$p(A \text{ y } B \text{ y } C) = p(A).p(B).p(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

ya que los sucesos A,B y C son independientes.

También se puede aplicar la "regla de Laplace" .En número de casos favorables es 1 y el número de casos posibles es 216 y su cociente 1/216 es la probabilidad del suceso $A \cap B \cap C$.

7. 21. Un dado está trucado de modo que la probabilidad de obtener las distintas caras es proporcional a los números de estas. Se pide :

a) Probabilidad de cada una de las caras

b) Probabilidad de sacar un número par

c) Probabilidad de sacar un múltiplo de 3

S O L U C I O N :

a) Sea x la probabilidad de sacar 1 , es decir , $p(1) = x$, entonces $p(2) = 2x$, $p(3) = 3x$, $p(4) = 4x$, $p(5) = 5x$, $p(6) = 6x$).

Por ser 1,2,3,4,5,6 elementos del espacio muestral, la suma de las probabilidades es 1 , es decir ,

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x$$

Luego , $x = \frac{1}{21}$

Por tanto, $p(1) = \frac{1}{21}$, $p(2) = \frac{2}{21}$, $p(3) = \frac{3}{21}$, $p(4) = \frac{4}{21}$, $p(5) = \frac{5}{21}$

$p(6) = \frac{6}{21}$

b) $p(\text{"sacar par"}) = p(\{2,4,6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$

c) $p(\text{"sacar múltiplo de 3"}) = p(\{3,6\}) = p(3) + p(6) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{9}{21}$

---oooOooo---

7. 2 2. La probabilidad de que una bomba lanzada por un avión haga blanco en el objetivo es 1/3. Hallar la probabilidad de alcanzar el objetivo, si se tiran tres bombas seguidas.

S O L U C I O N :

El suceso D = "hacer blanco en el objetivo" es el suceso complementario de $\bar{D}$,

$\bar{D}$ = "no hacer blanco en el objetivo"

Sean A = "hacer blanco en el objetivo con la primera bomba",

B = "hacer blanco en el objetivo con la segunda bomba",

C = "hacer blanco en el objetivo con la tercera bomba",

entonces ,

$$p(D) = 1 - p(\bar{D}) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$$
$$= 1 - p(\bar{A}).p(\bar{B}).p(\bar{C})$$
$$= 1 - \frac{2}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

7. 23. En una lotería los billetes están numerados consecutivamente desde el 0000 al 9999. Calcular la probabilidad de que obtenga el primer premio alguno de los números que solo tengan tres cifras distintas, tales como : 0094, 0210, 8550, 9676, 3283, ...

(PREUNIVERSITARIO)

SOLUCION :

Aplicaremos la regla de Laplace.

a) Casos posibles : 10000

b) Casos favorables :

1°) Las posibilidades de elegir tres cifras distintas es : $\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120$

2°) Como se ha de repetir una de las cifras de cada grupo , cada uno de estos 120 nos da tres nuevas posibilidades, y tendremos entonces $120.3 = 360$

3°) Cada uno de estos 360 grupos es de la forma aabc, abbc, abcc. Si permutamos las letras obtendremos finalmente todos los números posibles. Así el grupo aabc da lugar a 12 números , puesto que

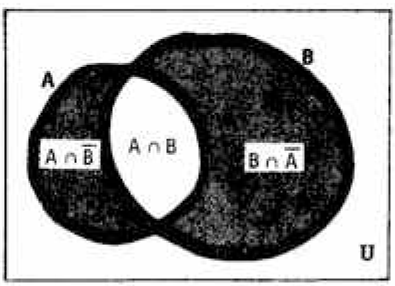
$$P_4^2 = \frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$$

Por tanto, el número de billetes favorables es : $360.12 = 4320$.

Probabilidad de obtener el primer premio $= \frac{4320}{10000} = 0'432$

---oooOooo---

7. 24. Los sucesos A y B de un experimento aleatorio son independientes y tienen por probabilidad , $p(A) = p$ y $p(B) = q$. Hallar la probabilidad de que al realizar el experimento solo ocurra uno de los dos sucesos.



SOLUCION :

Consideremos la figura adjunta. Si $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos complementarios de A y B respectivamente, se tiene que el sucesos pedido es

$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

Por tanto :

$p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B)$, ya que los sucesos $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ son imcompatibles,

$= p(A)p(\bar{B}) + p(\bar{A})p(B)$, ya que los sucesos A y $\bar{B}$, $\bar{A}$ y B son independientes

$= p(1-q) + (1-p)q$, ya que $p(\bar{A}) = 1 - p$ y $p(\bar{B}) = 1 - q$

7.25. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, salga por suma, o bien 3, o bien 4, o bien 5?.

SOLUCION: (JRV-VII-6)

Sean A el suceso "sacar 3 puntos con dos dados",

B el suceso "sacar 4 puntos con dos dados" y

C el suceso "sacar 5 puntos con dos dados", entonces los sucesos A, B y C se pueden expresar también así:

$A = \{21, 12\}$

$B = \{31, 22, 13\}$

$C = \{41, 32, 23, 14\}$

Recordemos que el número de casos posibles al tirar dos dados es 36. Por tanto,

$$p(A \text{ o } B \text{ o } C) = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{36}$$

---oooOooo---

7.26. Una urna contiene 8 bolas rojas, 5 amarillas, 7 verdes. Se extrae una al azar. Determinar la probabilidad de que:

a) Sea roja

b) Sea amarilla

c) Sea verde

d) No sea roja

e) Sea roja o verde

f) No sea verde.

(JRV-VII-13)

SOLUCION:

Sean A el suceso "sacar bola roja",

B el suceso "sacar bola amarilla" y

C el suceso "sacar bola verde".

a) $p(A) = \frac{8}{8+5+7} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

b) $p(B) = \frac{5}{20}$

c) $p(C) = \frac{7}{20}$

d) El suceso "sacar bola **NO** roja" es el suceso contrario del A. Por tanto,

$$p(\{\text{sacar bola no roja}\}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

e) El suceso "sacar bola roja o verde" es el suceso unión de A y B. Por tanto,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{3}{4}$$

f) El suceso "sacar bola **NO** verde" es el suceso contrario del C. Por tanto,

$$p(\{\text{sacar bola no verde}\}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$$

7.27. La probabilidad de que un hombre y una mujer de 18 años vivan 50 más es 0.6 y 0.7 respectivamente. Se casan. Se pide :

a) Probabilidad de que vivan después de 50 años
b) Probabilidad de que viva solo el hombre
c) Probabilidad de que viva solo la mujer
d) Probabilidad de que viva al menos uno de los dos
e) Probabilidad de que no viva ninguno de los dos.

S O L U C I O N :

Sean B el suceso "la mujer vive 50 años más" ,
A el suceso "el hombre vive 50 años más" ,
$\bar{A}$ y $\bar{B}$ los sucesos contrarios de A y B respectivamente.

Entonces :

a) p("vivan después de 50 años") = $p(A \cap B) = p(A).p(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$

b) p("viva solo el hombre") = $p(A \cap \bar{B}) = p(A).p(\bar{B}) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$

c) p("viva solo la mujer") = $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}).p(B) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$

d) p("viva al menos uno de los dos") = $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$= 0.6 + 0.7 - 0.42$$

$$= 0.88$$

e) El suceso "no viva ninguno de los dos" es el suceso contrario de "viva al menos uno de los dos"

por tanto,

p("no viva ninguno de los dos") = 1 - p("viva al menos uno de los dos")

$$= 1 - 0.88 = 0.12$$

---oooOooo---

7.28. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas blancas de una urna que contiene 14 bolas blancas y 16 bolas negras, con reemplazamiento y sin él?. (JRV-VII-8)

S O L U C I O N :

Sean A el suceso "sacar blanca en la primera extracción"
B el suceso "sacar blanca en la segunda extracción".

Veamos cuál es la probabilidad en cada uno de los casos :

a) Con reemplazamiento.

$$p(A \text{ y } B) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{14}{30} \cdot \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \cdot \frac{7}{15} = \frac{49}{225}$$

b) Sin reemplazamiento.

$$p(A \text{ y } B) = p(A).p(B/A) = \frac{14}{30} \cdot \frac{13}{30} = \frac{7}{15} \cdot \frac{13}{30} = \frac{91}{450}$$

7.29. Hallar la probabilidad de obtener al menos un 6 doble en n tiradas de dos dados.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Sean A_1 el suceso "sacar 6 doble en la primera tirada",
A_2 el suceso "sacar 6 doble en la segunda tirada",
A_3 el suceso "sacar 6 doble en la tercera tirada" ,
... ...
A_n el suceso "sacar 6 doble en la n-ésima tirada".

La probabilidad pedida será , siendo A el suceso dado , :

$$
\begin{aligned}
P(A) &= p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) \\
&= 1 - p(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n}) \\
&= 1 - p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) \\
&= 1 - p(\bar{A}_1)p(\bar{A}_2)p(\bar{A}_3). \;\ldots\; .p(\bar{A}_n) \quad \text{, ya que los sucesos son independientes,} \\
&= 1 - \left(p(\bar{A}_1)\right)^n \quad \text{, ya que todos los sucesos tienen la misma probabilidad,} \\
&= 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^n
\end{aligned}
$$

, ya que de los 36 casos que resultan al tirar dos dados solo el 66 es favorable , por tanto como $\bar{A}_1$ es el complementario , su probabilidad será $\frac{35}{36}$

---oooOooo---

7.30. De una baraja de 40 cartas se sacan dos al azar.Hallar la probabilidad de que sean dos reyes.

(SELECTIVIDAD - 1976)

SOLUCION :

Primer método :

a) El número de posibilidades de elección de dos cartas es : $\binom{40}{2} = \frac{39.40}{1.2} = 780$

b) El número de posibilidades de elección de dos reyes es : $\binom{4}{2} = \frac{4.3}{1.2} = 6$

Aplicando la regla de Laplace , se tiene :

$$\text{probabilidad de sacar dos reyes} = \frac{6}{780} = \frac{2}{260} = \frac{1}{130}$$

Segundo método :

Sean A el suceso "sacar rey en la primera extracción"
B el suceso "sacar rey en la segunda extracción" , entonces el suceso pedido viene dado como la intersección de A y B, puesto que la extracción al azar de dos cartas es equivalente a la extracción sucesiva sin reemplazamiento.

Por tanto , $$p(A \cap B) = p(A).p(B/A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{130}$$

7.31. Hallar la probabilidad de obtener al azar, de una baraja española :

1°) un rey y un as

2°) un rey o un as

3°) dos reyes

en extracciones sucesivas, devolviendo la carta a la baraja después de la primera extracción.

(Selectividad - 1975 -JRV-VII-20)

SOLUCION :

Sean R el suceso "sacar un rey en la primera extracción" ,

A el suceso "sacar un as en la segunda extracción" y

R* el suceso "sacar un rey en la segunda extracción".

1°) El suceso "sacar un rey y un as" es el suceso intersección de R y A, y además son sucesos independientes. Por tanto ,

$$p(\text{"sacar un rey y un as"}) = p(R \cap A) = p(R).p(A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

2°) El suceso "sacar un rey o un as" es el suceso unión de R y A , y además son incompatibles. Por tanto ,

$$p(\text{"sacar un rey o un as"}) = p(R \cup A) = p(R) + p(A) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

3°) El suceso "sacar dos reyes" es el suceso intersección de los sucesos R y R* , además son independientes. Por tanto ,

$$p(\text{"sacar dos reyes"}) = p(R \cap R^*) = p(R).p(R^*) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

---oooOooo---

7.32. Una urna contiene tres bolas blancas y siete negras. Otra contiene cuatro bolas blancas y 5 negras. Extraemos una bola de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?.

(JRV-VII-12)

SOLUCION :

Sean A el suceso "sacar bola negra de la primera urna" y

B el suceso "sacar bola negra de la segunda urna" , entonces el suceso

C "sacar bola negra en la primera urna y en la segunda" es la intersección de los sucesos A y B , es decir , $C = A \cap B$

a) La probabilidad del suceso A es : $p(A) = \frac{7}{10}$

b) La probabilidad del suceso B es : $p(B) = \frac{5}{9}$

c) Siendo los sucesos A y B independientes , resulta :

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$$

7.33. Hallar la probabilidad de sacar un rey y un caballo en la extracción simultánea al azar de dos cartas de una baraja española. *(SELECTIVIDAD - 1976)*

SOLUCION :

Primer método:

La extracción simultánea de dos cartas equivale a la extracción sucesiva sim reemplazamiento. Si

R es el suceso "sacar rey "

C es el suceso "sacar caballo"

entonces el suceso "sacar rey y caballo simultáneamente" equivale a la unión de los sucesos RC y CR. Por tanto,

$$p(RC \cup CR) = p(RC) + p(CR) = p(R)p(C/R) + p(C)p(R/C)$$
$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} + \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 2 \cdot \frac{4}{390} = \frac{8}{390}$$

Segundo método:

Veamos cómo se obtiene la probabilidad del suceso pedido por la "regla de Laplace" .

1°) Casos posibles $= C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{39.40}{1.2} = 390$

2°) Casos favorables $= \frac{1}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 8$, ya que los caso CR o RC son indistinguibles al ser la extracción simultánea.

De 1°) y 2°) se sigue que la probabilidad del suceso pedido es :

$$p(\text{"rey y caballo"}) = \frac{8}{390}$$

---oooOooo---

7.34. ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar y sucesivamente, dos cartas de numeración consecutiva en una baraja española?

SOLUCION :

Sean A = "sacar una carta de la baraja la primera vez" y

B = "sacar una carta consecutiva a la anterior la segunda vez"

entonces, el suceso pedido viene dado por $A \cap B$.

Por tanto,

$$p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$$
$$= 1 \cdot \frac{8}{39} = \frac{8}{39}$$

puesto que $p(A) = 1$, ya que es el suceso cierto, y

$p(B/A) = \frac{8}{39}$, ya que hay 8 cartas consecutivas a una dada, dos de cada palo , la anterior y siguiente.

7.35. Calcular la probabilidad de que al lanzar n veces una moneda obtengamos n caras.

(*JRV-VII-15*)

SOLUCION:

Sean C el suceso "sacar cara en el primer lanzamiento",

CC el suceso "sacar cara en el primero y en el segundo",

CCC el suceso "sacar cara en el primero, en el segundo y en el tercero"

...

CCC ...C el suceso "sacar cara en cada uno de los n lanzamientos"

Se tiene entonces :

$$CC = C \cap C$$

$$CCC = C \cap C \cap C$$

$$CCC\dots C = C \cap C \cap C \cap \dots \cap C$$

siendo además todos los sucesos independientes. Por tanto :

$$p(CCC \dots C) = p(C).p(C).p(C) \dots p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

---oooOooo---

7.36. En una baraja de 40 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que un grupo de cinco cartas contenga exactamente dos ases?.

(*Selectividad* - 1975 - *JRV-VII-17*)

SOLUCION:

Vamos a aplicar la "regla de Laplace".

a) Número de casos posibles.

Los grupos distintos de cinco cartas que se pueden formar son precisamente las combinaciones de las 40 cartas tomadas de 5 en 5, es decir,

$$\text{número de casos posibles} = \binom{40}{5}$$

b) Casos favorables.

Consideremos que elegimos primero los dos ases. El número de elecciones posibles es $\binom{4}{2}$

Elegidos los dos ases, hay que elegir las tres cartas restantes. El número de elecciones para estas tres cartas es $\binom{36}{3}$ puesto que los ases no entran. Por tanto,

$$\text{número de casos favorables} = \binom{4}{2}\binom{36}{3}$$

De a) y b) se sigue, siendo A el suceso dado,

$$p(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{36}{3}}{\binom{40}{5}} = \frac{\frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{36.35.34}{1.\ 2.\ 3}}{\frac{40.39.38.37.36}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}} = \frac{119}{18\ 278}$$

7.37. Calcular la probabilidad de sacar rey, seguido de un as, seguido de un rey y este seguido de un caballo, en una baraja española.

a) Con reemplazamiento

b) Sin reemplazamiento.

(*JRV-VII-9*)

SOLUCION:

Sean A el suceso "sacar rey en la primera extracción" ,

B el suceso "sacar as en la segunda extracción" ,

C el suceso "sacar rey en la tercera extracción" y

D el suceso "sacar caballo en la cuarta extracción".

Veamos cuál es la probabilidad en cada uno de los dos casos.

a) Con reemplazamiento.

En este caso los cuatro sucesos A,B,C y D son independientes y cada uno tiene de probabilidad 1/40 . Por tanto,

$$p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A).p(B).p(C).p(D) = \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{10000}$$

b) Sin reemplazamiento.

En este caso los sucesos no son independientes, cada suceso está condicionado a los anteriores.

$$p(A \cap B \cap C \cap D) = p(A).p(B/A).p(C/A \cap B).p(D/A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{3}{38} \cdot \frac{4}{37}$$

$$= \frac{4.4.3.4}{40.39.38.37} = \frac{4}{5.13.19.37} = \frac{4}{45695}$$

---oooOooo---

7.38. Hallar la probabilidad de ganar dos de tres juegos independientes si la probabilidad de ganar cualquiera de ellos es 0,01.

(*SELECTIVIDAD* -1975)

SOLUCION:

Si designamos por G ganar un partido y por P perderlo, entonces los casos favorables son :

GGP , GPG , PGG

Por tanto,

$$p(\text{"ganar dos juegos de tres"}) = p(GGP \cup GPG \cup PGG)$$

$$= p(GGP) + p(GPG) + p(PGG)$$

$$= p(G)p(G)p(P)+p(G)p(P)p(G)+p(P)p(G)p(G)$$

$$= 3.p(G)p(G)p(P) = 3.0,01^2.0,99 = 0,000297$$

7.39. Se tiene una urna con 4 bolas blancas y tres negras. Se extrae una bola al azar, anotamos su color, y sin devolverla a la urna, extraemos una segunda bola.

Se pide :

a) El espacio muestral.

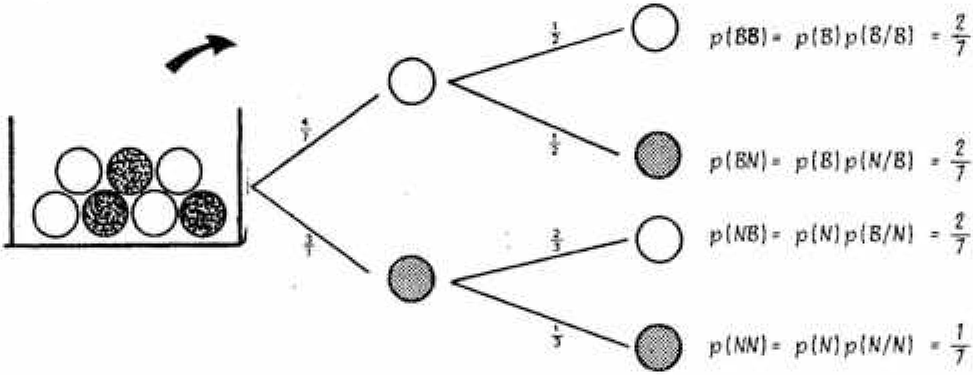
b) La probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral.

S O L U C I O N :

a) Los resultados posibles son : Blanca-Blanca ,
Blanca-Negra
Negra -Blanca (Véase la figura)
Negra -Negra

y el espacio muestral es : E = {BB,BN,NB,NN}

a) En la figura se ha señalado las probabilidades de extracción de cada una de las bolas. Siendo sucesos dependientes , se tiene :



---oooOooo---

7.40. En una caja tenemos dos bolas blancas, una negra y siete rojas. Extrayendo dos bolas sucesivamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener una bola negra seguida de una blanca?.

a) Reponiendo la bola

b) Sin reponerla. [JRV-VII-16]

S O L U C I O N :

Sea N el suceso "sacar una bola negra"

B el suceso "sacar una bola blanca"

NB el suceso "sacar una bola blanca seguida de una negra"

Veamos ahora cuál es la probabilidad en cada uno de los casos pedidos.

a) Reponiendo la bola.

$p(NB) = p(N \cap B) = p(N).p(B)$, ya que los sucesos son independientes

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{50}$$

b) Sin reponer la bola.

$p(NB) = p(N \cap B) = p(N).p(B/N)$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{45}$$

---oooOooo---

7.41. A un congreso de científicos asisten 100 congresistas. De ellos, 80 hablan francés y 40 ingles. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérprete?. *(PREUNIVERSITARIO)*

SOLUCION :

1) Sean $F = \{x \ / \ x$ es un congresista que habla francés$\}$

$I = \{x \ / \ x$ es un congresista que habla inglés$\}$

entonces ,

$$\text{Card}(F \cup I) = \text{Card}(F) + \text{Card}(I) - \text{Card}(F \cap I)$$

es decir, $100 = 80 + 40 - \text{Card}(F \cap I)$

de donde , $\text{Card}(F \cap I) = 20$.

Por tanto, a) Número de congresistas que hablan solo francés = 60

b) Número de congresistas que hablan solo inglés = 20

c) Número de congresistas que hablan francés e inglés = 20

2) Vamos a hallar la probabilidad aplicando la "regla de Laplace".

a) Número de casos favorables.

Como hay 60 congresistas que no saben inglés y 20 no saben francés , el número de parejas que no se entienden es : 20 . 60 = 1200

b) Número de casos posibles.

El número de parejas que se pueden formar con los 100 congresistas es :

$$\binom{100}{2} = \frac{100.99}{1.2} = 4\ 950$$

Por tanto, la probabilidad pedida , p , es :

$$p = \frac{1\ 200}{4\ 950} = \frac{8}{33}$$

---oooOooo---

7.42. Determinar la probabilidad p para cada uno de los siguientes sucesos :

a) Aparición de un número par en una tirada de un dado equilibrado.

b) La obtención de 6 puntos en una sola tirada de un par de dados.

c) La aparición de cara en el lanzamiento de una moneda, si en 100 lanzamientos previos aparecieron 54 caras.

[JRV-VII-4]

S O L U C I O N :

a) Sea A el suceso "sacar par al tirar un dado", entonces $A = \{2,4,6\}$. Siendo el espacio equiprobable se tiene :

$$p(A) = p(\{2,4,6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

También se puede aplicar la "regla de Laplace"

$$p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Sea B el suceso "obtener 6 puntos en una sola tirada de dos dados" , entonces $B = \{51,42,33,24,15\}$. Siendo el espacio equiprobable resulta :

$$p(B) = p(\{51,42,33,24,51\}) = p(\{51\}) + p(\{42\}) + p(\{33\}) + p(\{24\}) + p(\{51\})$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

ya que la probabilidad del un suceso elemental es $\frac{1}{36}$

Aplicado la "regla de Laplace" se obtiene el mismo resultado puesto que los casos favorables son 5 y los casos posibles 36.

c) Si la moneda fuese equilibrada la probabilidad de sacar cara o cruz sería $\frac{1}{2}$, aquí, sin embargo, debemos considerar la probabilidad empírica deducida de la serie de los 100 primeros lanzamientos.

Por tanto, la probabilidad de sacar cara es : $\frac{54}{100} = \frac{27}{50}$

---oooOooo---

7.43. Se tiene una moneda tarada cuya probabilidad de cara es 0.75 . Se tiran 1000 lanzamientos. Hallar el número de veces que probablemente saldrá cara.

S O L U C I O N :

Aplicando la regla de Laplace se tiene :

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \text{ , entonces } 0.75 = \frac{n'}{1000} \text{ , y por tanto :}$$

Número de veces que saldrá probablemente cara = $n' = 0.75 \times 1000 = 750$

7.44. Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda y la extracción de una carta de una baraja española.

Sean A el suceso "salir cruz al tirar la moneda" y

B el suceso "extraer un oro de la baraja".

Calcular :

a) $p(A)$ e) $p(A \cap B)$

b) $p(\bar{A})$ f) $p(A \cap \bar{B})$

c) $p(B)$ g) $p(\bar{A} \cap B)$

d) $p(\bar{B})$ h) $p(A \cup B)$ *[JRV-VII-10]*

SOLUCION :

a) $p(A) = \frac{1}{2}$

b) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $p(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

d) $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

e) Los sucesos A y B son independientes, por tanto :

$$p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

f) Los sucesos A y $\bar{B}$ son también independientes , por tanto :

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A).p(\bar{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

g) También son independientes los sucesos $\bar{A}$ y B , por tanto :

$$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}).p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

h) Siendo A y B sucesos incompatibles , se verifica que :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

---oooOooo---

7.45. Sean los sucesos A y B con $p(A) = \frac{1}{2}$,$p(B) = \frac{1}{3}$ y $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar i) $p(A/B)$ y ii) $p(B/A)$.

SOLUCION :

i) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$

ii) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

7.46. Una urna contiene 6 bolas negras y 3 bolas rojas. Otra contiene 8 bolas negras y 10 rojas.

Si se extrae una bola de cada urna, hallar la probabilidad de que:

a) Sean ambas negras

b) Sean ambas rojas

c) Sean una roja y otra negra. *[JRV-VII-14]*

S O L U C I O N :

Sea N el suceso "sacar bola negra en la primera urna"

N* el suceso "sacar bola negra en la segunda urna"

R el suceso "sacar bola roja en la primera urna"

R* el suceso "sacar bola roja en la segunda urna" , entonces :

$p(N) = \frac{6}{9}$; $p(N^*) = \frac{8}{18}$; $p(R) = \frac{3}{9}$; $p(R^*) = \frac{10}{18}$

Veamos ahora la probabilidad de los sucesos dados.

a) Sea NN^* el suceso "sacar ambas bolas negras" , entonces $NN^* = N \cap N^*$ y por tanto , ya que son sucesos independientes, resulta :

$$p(NN^*) = p(N).p(N^*) = \frac{6}{9} \cdot \frac{8}{18} = \frac{8}{27}$$

b) Sea RR^* el suceso "sacar ambas bolas rojas" , entonces $RR^* = R \cap R^*$ y por tanto, ya que son sucesos independientes , resulta :

$$p(RR^*) = p(R).p(R^*) = \frac{3}{9} \cdot \frac{10}{18} = \frac{5}{27}$$

c) Ya que no se dice si la primera debe ser roja (negra) o la segunda ,existen las dos siguientes posibilidades : NR^* o RN^* . Por tanto , el suceso "sea una roja y otra negra" está formado por la unión de los sucesos NR^* y RN^*. La probabilidad es :

$$p(NR^* \cup RN^*) = p(NR^*) + p(RN^*) = p(N).p(R^*) + p(R).p(N^*)$$

$$= \frac{6}{9} \cdot \frac{10}{18} + \frac{3}{9} \cdot \frac{8}{18} = \frac{14}{27}$$

---oooOooo---

7.47. Sean los sucesos A y B con $p(A) = \frac{3}{8}$,$p(B) = \frac{5}{8}$ y $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Hallar i) $P(A/B)$ y ii) $p(B/A)$.

S O L U C I O N :

Teniendo en cuenta que $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$, resulta que :

$$p(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{2}{8}$$

i) $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2}{8} : \frac{5}{8} = \frac{2}{5}$ ii) $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{2}{8} : \frac{3}{8} = \frac{2}{3}$

7.48. Hallar la probabilidad p de cada uno de los siguientes sucesos :

a) Extraer un cerrojo no defectuoso , si de 500 examinados han apa recido 7 defectuosos.

b) Extraer de una baraja de 40 cartas, rey , as o sota en una sola extracción.

c) La aparición en una sola tirada de dos dados de la suma 8 u 11.

(JRV-VII-5)

SOLUCION :

a) Sea A el suceso "sacar un cerrojo NO defectuoso" y

B el suceso "sacar un cerrojo defectuoso".

Para hallar la probabilidad de los sucesos A y B tendremos en cuenta la probabilidad empírica de los 500 examinados previamente. Por tanto ,

a) $p(B) = \frac{7}{500}$

b) $p(A) = 1 - p(B) = 1 - \frac{7}{500} = \frac{493}{500}$

ya que los sucesos A y B son sucesos contrarios.

b) Sea C el suceso de "extraer rey,as o sota de una baraja de 40 cartas" , entonces ,

$$p(C) = p(\{rey,as,sota\}) = p(\{rey\}) + p(\{as\}) + p(\{sota\})$$
$$= \frac{4}{40} + \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

c) Sea A el suceso "sacar 8 puntos al tirar dos dados" y

B el suceso "sacar 11 puntos al tirar dos dados " , entonces

A y B se pueden expresar también así :

$A = \{62 , 53 , 44 , 35 , 26\}$

$B = \{65 , 56\}$

Por tanto, $p(A \text{ o } B) = p(A) + p(B) = \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{7}{36}$

---oooOooo---

7.49. Se lanza un dado.Si el número que ha salido es impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?.

SOLUCION :

Sea A el suceso "el número que ha salido es impar" = $\{1,3,5\}$

B el suceso "el número que ha salido es primo" = $\{3,5\}$

entonces, la probabilidad del suceso B ya que se ha realizado A es : $p(B) = \frac{2}{3}$

7.50. De una urna que contiene tres bolas rojas y cinco azules se extraen simultáneamente dos bolas.

a) Escribir el espacio muestral y

b) calcular la probabilidad de que las dos bolas sean azules.

(SELECTIVIDAD - 1976)

S O L U C I O N :

a) Si b = bola blanca y a = bola azul, tenemos la urna llena de la siguiente forma :

$$C = \{b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

Como extraemos simultáneamente dos bolas, el posibles espacio muestral es :

$$E = \{bb\ ,\ ba\ ,\ aa\}$$

NOTA : *Obsérvese que la extracción es* **SIMULTANEA** . *Si la extracción fuese sucesiva, entonces el espacio muestral sería :*

$$E = \{bb\ ,\ ba\ ,\ ab\ ,\ aa\}$$

c) Sea A el suceso "sacar la primera bola azúl" y

B el suceso "sacar la segunda bola azul" .

Tenemos que calcular la probabilidad del suceso $A \cap B$. Como son sucesos dependientes, se tiene :

$$p(A \cap B) = p(A).p(B/A) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

También se puede resolver esta segunda parte por la "regla de Laplace".

1°) Casos posibles .

Es evidente que se trata de combinaciones de 8 elementos tomados de 2 en 2.

$$\text{Número de caso posibles} = \binom{8}{2} = \frac{8.7}{1.2} = 28$$

2°) Casos favorables.

Se trata de elegir de 5 bolas azules dos, son,por tanto, combinaciones de 5 elementos tomados de dos en dos.

$$\text{Número de casos favorables} = \binom{5}{2} = \frac{5.4}{1.2} = 10$$

De 1°) y 2°) se sigue que la probabilidad pedida es :

$$p(A \cap B) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

---oooOooo---

8 ESTADISTICA DESCRIPTIVA

en el que se desarrollan las siguientes materias:

1. MUESTRA Y POBLACION
2. VARIABLES ESTADISTICAS
3. DISTRIBUCIONES ESTADISTICAS
4. REPRESENTACIONES GRAFICAS
5. MEDIDAS DE CENTRALIZACION
6. MEDIDAS DE DISPERSION

8.1. Las calificaciones de un estudiante en seis pruebas fueron : 87,64,92,86,69,71.
Hallar la media y la desviación típica.

(JRV-VIII-1)

SOLUCION :

Consideremos la tabla siguiente :

x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
87	8'84	78'14
64	-14'16	200'50
92	13'84	191'54
86	7'84	61'46
69	-9'16	83'90
71	-7'16	51'26
469		666'80

a) De la primera columna se obtiene la media : $\bar{x} = \frac{469}{6} = 78'16$

b) Conocido este valor se puede ya calcular la segunda columna y la tercera.

c) De la tercera columna se obtiene finalmente la varianza y la desviación típica.

i) $S^2 = \frac{666'80}{6} = 111'13$

ii) $S = 10'54$

---oooOooo---

8.2. Un alumno de C.O.U. realiza tres exámenes trimestrales y uno final. Cada examen trimestral tiene doble importancia que el anterior y el examen final una importancia triple. Un alumno saca 6,7,5 y 8 notas respectivamente. ¿Cuál es la nota final?.

SOLUCION :

Se trata de una media aritmética ponderada, puesto que cada una de las notas no vale lo mismo. Se tiene ,pues,

x_i	p_i (peso)	x_ip_i
6	1	6
7	2	14
5	4	20
8	12	96
	19	136

Por tanto, la nota final es : 136 : 19 = 7'15

8.3. En un exámen biológico de la sangre de unos enfermos se obtuvieron, en miles de leucocitos, las cantidades siguientes:

8'5 , 9'5 , 12 , 11'5 , 14'5 , 10 , 17'5 , 13'5

Hallar la media y la varianza y desviación típica.

(JRV-VIII-2)

SOLUCION :

Consideremos la tabla siguiente :

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
8'5	-3'62	13'10
9'5	-2'62	6'86
12	-0'12	0'01
11'5	-0'62	0'38
14'5	2'38	5'66
10	-2'12	4'49
17'5	5'38	28'94
13'5	1'38	1'90
Σ: 97		Σ: 61'34

a) De la primera columna se obtiene la media : $\bar{x} = \frac{97}{8} = 12'12$

b) Conocido el valor de la media se calculan los valores de la segunda y tercera columnas.

c) De la tercera columna se obtiene finalmente los valores de la varianza y desviación típica.

i) Varianza $S^2 = \frac{61'34}{8} = 7'66$

ii) Desviación típica $S = \sqrt{7'66} = 2'76$

---oooOooo---

8.4. En un grupo de 50 personas hay algunas que pesan 70 kgs y otras que pesan 80kgs. ¿Se puede afirmar que la media de los pesos es de 75 kgs?. ¿Por qué?.

SOLUCION :

a) Si hay 25 personas que pesan 70 y 25 que pesan 80 entonces sí, es decir, la media en este caso es 75 como puede comprobarse inmediatamente.

b) En cualquier otro caso la media no es 75. Por ejemplo, si hay 40 con 70 kgs y 10 con 80 kgs , entonces la media es :

$$\bar{x} = \frac{40.70 + 10.80}{50} = 72.$$

8.5. La tabla adjunta muestra una distribución de frecuencias de los salarios diarios de 70 empleados de una empresa :

SALARIOS EN PTAS	NUMERO DE EMPLEADOS
400-449	8
450-499	12
500-549	17
550-599	15
600-649	11
650-699	5
700-749	2

Calcular :

a) Límite inferior de la sexta clase

b) Límite superior de la cuarta clase

c) Marca de la tercera clase

d) Límites reales de la quinta clase

e) Recorrido o rango

f) Media

g) Mediana

h) Moda

i) Desviación típica y varianza. [JRV-VIII-3]

SOLUCION :

Consideremos el siguiente cuadro :

CLASE	I. REALES	MARCA	f_i	u_i	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
1ª	399'5-449'5	424'5	8	-2	-16	32
2ª	449'5-499'5	474'5	12	-1	-12	12
3ª	499'5-549'5	524'5	17	0	0	0
4ª	549'5-599'5	574'5	15	1	15	15
5ª	599'5-649'5	624'5	11	2	22	44
6ª	649'5-699'5	674'5	5	3	15	45
7ª	699'5-749'5	724'5	2	4	8	32
			70		32	180

f) La media viene dada por : $\bar{x} = x_o + c\bar{u} = x_o + c\,\frac{\Sigma f_i u_i}{N}$

$$= 524'5 + 50.\,\frac{32}{70} = 547'35$$

a) Límite inferior de la sexta clase = 650

b) Límite superior de la cuarta clase = 599

c) Marca de la tercera clase :

$$x_3 = \frac{499'5 + 549'5}{2}$$

$$= 524'5$$

d) Límites reales de la quinta clase :

Límite inferior = 599'5

Límite superior = 649'5

e) Rango o recorrido = 749'5 - 399'5 = 350

g) La mediana viene dada por la tercera clase, es decir, la mediana es 524'5 puesto que es donde se alcanza la mitad de los individuos.

Si queremos un valor más preciso podemos aplicar la siguiente fórmula :

$$M = L_i + \left(\frac{\frac{N}{2} - \sum f_i}{f_{mediana}} \right) c =$$

$$= 449'5 + \frac{\frac{70}{2} - 20}{17} . 50 = 543'16$$

h) La clase modal es la tercera. Por tanto, la moda es 524'5

Si queremos un valor más real podemos aplicar la siguiente fórmula :

$$Mo = L_i + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c = 449'5 + \frac{17 - 12}{(17-12)+(17-15)} .50$$

$$= 431'14$$

i) Veamos ahora cuál es el valor de la varianza y desviación típica.

a) Varianza :

$$s^2 = c^2 \left(\frac{\Sigma f_i u_i^2}{N} + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{N} \right)^2 \right)$$

$$= 50^2 \left[\frac{180}{70} + \left(\frac{32}{70} \right)^2 \right]$$

$$= 5906'12$$

b) Desviación típica :

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5096'12} = 76'85$$

8.6. El número de hijos de 10 familias seleccionadas es el siguiente :

5 , 2 , 0 , 6 , 3 , 1 , 2 , 3 , 1 , 4

a) Construir el diagrama de barras.

b) Hallar la media aritmética

c) Hallar la desviación típica.

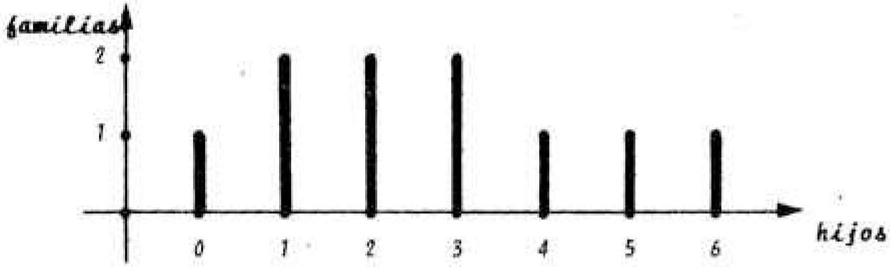
(JRV-VIII-4)

SOLUCION :

Consideremos el siguiente cuadro:

x_i	recuento	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
0	/	1	0	0
1	//	2	2	2
2	//	2	4	8
3	//	2	6	18
4	/	1	4	16
5	/	1	5	25
6	/	1	6	36
		10	27	105

a) El diagrama de barras viene dado en la siguiente figura :



b) La media aritmética viene dada por :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, x_i f_i}{N} = \frac{27}{10} = \mathbf{2'7}$$

c) La varianza viene dada por :

$$s^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma\, f_i x_i^2}{N} - \frac{\Sigma\, f_i x_i}{N} = \frac{\Sigma\, f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{105}{10} - 2{,}7^2 = 10'5 - 7'29 = \mathbf{3'21}$$

La desviación típica = s = **1'79**

8.7. El número de muertes producidas por accidentes de tráfico en una población a lo largo de una semana ha sido :

8 , 3 , 5 , 2 , 7 , 1 , 9

a) Representar la distribución mediante un diagrama.

b) Hallar la media

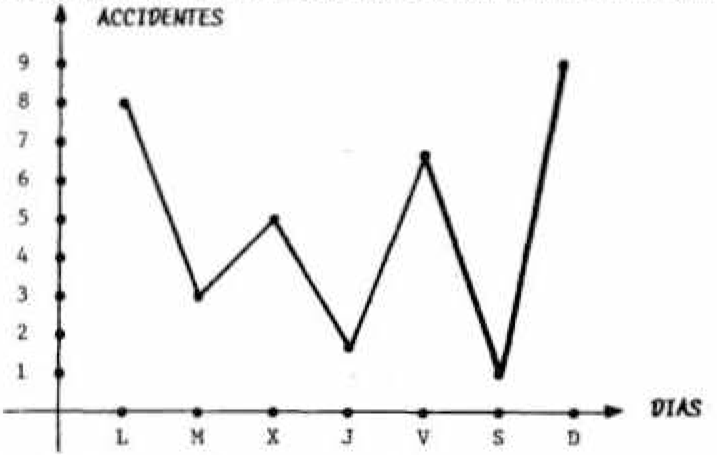
c) Hallar la mediana

d) Hallar la varianza y desviación típica.

(JRV-VIII-5)

S O L U C I O N :

a) Representamos la distribución mediante el siguiente diagrama poligonal :



c) Ordenados los datos se tiene : 1 , 2 , 3 , 5 , 7 , 8 , 9 , luego la mediana es 5.

Consideremos ahora la siguiente tabla :

Dias	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
Lunes	8	3	9
Martes	3	-2	4
Miércoles	5	0	0
Jueves	2	-3	9
Viernes	7	2	4
Sabado	1	-4	16
Domingo	9	4	16
7	35		58

i) $S^2 = \frac{58}{7} = 8'28$

ii) $S = \sqrt{8'28}$

$= 2'87$

b) La media de la distribución dada es : $\bar{x} = \frac{35}{7} = 5$

d) De la cuarta columna se obtiene el valor de la varianza y de la desviación típica. A la derecha del cuadro están estos valores.

8.8. La distribución por pesos de 60 pacientes de un centro médico es la siguiente :

Kilos de peso :	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
Número de pacientes :	3	15	20	17	4	1

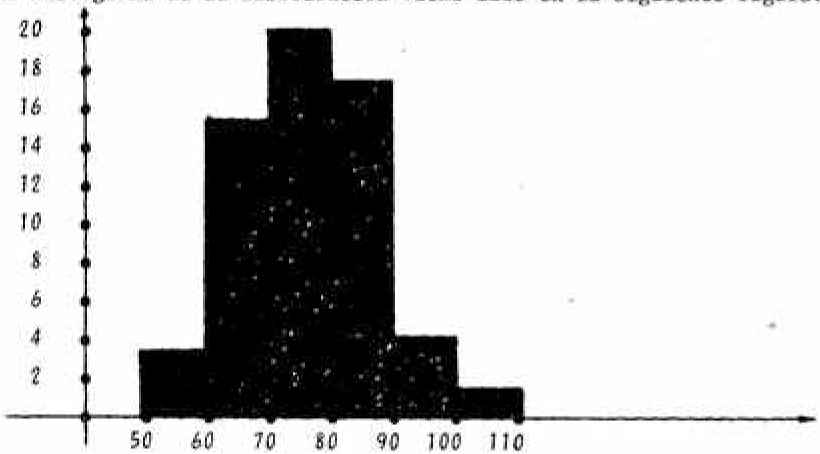
a) Representar madiante un histograma la distribución.

b) Hallar todas las medidas de dispersión estudiadas.

(JRV-VIII-6)

S O L U C I O N :

a) El histograma de la distribución viene dado en la siguiente figura:



Marcas : 55 65 75 85 95 105

Consideremos ahora la siguiente tabla :

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot f_i$
55	3	165	-21'16	21'16	63'48	447'74	1343'22
65	15	975	-11'16	11'16	167'40	124'54	1868'10
75	20	1500	- 1'16	1'16	23'20	1'34	26'80
85	17	1445	8'84	8'84	150'28	78'14	1328'38
95	4	380	18'84	18'84	74'36	359'94	1419'76
105	1	105	28'84	28'84	28'84	831'74	831'74
	60	4570			507'56		6818'00

$\text{MEDIA} = \dfrac{4570}{60} = 76'16$

b) i) Rango o recorrido ; 110 - 50 = 60

ii) Desviación media $D_{\bar{x}}$ = 507'56 : 60 = 8'46

iii) Varianza S^2 = 6818 : 60 = 113'63

iv) Desviación típica S = 10'65

8.9. La temperatura que ha marcado el termómetro los diferentes días de la semana ha sido :

DIAS	MINIMA	MAXIMA
Lunes	4	19
Martes	-2	18
Miércoles	-3	21
Jueves	1	13
Viernes	4	12
Sábado	0	14
Domingo	3	22

Hallar :

a) La temperatura media mínima

b) La temperatura media máxima

c) La media de las oscilaciones extremas diarias. *(JRV-VIII-7)*

S O L U C I O N :

Consideremos el siguiente cuadro :

DIAS	MINIMA	MAXIMA	OSCILACIONES
Lunes	4	19	15
Martes	-2	18	20
Miércoles	-3	21	24
Jueves	1	13	12
Viernes	4	12	8
Sábado	0	14	14
Domingo	3	22	19
7	7	119	112

a) La temperatura media mínima es : $\bar{x}_m = 7 : 7 = 1$

b) La temperatura media máxima es : $\bar{x}_M = 119 ; 7 = 17$

c) La media de las oscilaciones extremas diarias es : $\bar{x}_o = 112 : 7 = 16$

NOTA : *Las oscilaciones vienen dadas por la diferencia entre la temperatura máxima y mínima.*

---oooOooo---

8.10. Las declaraciones de Ayuda Familiar formuladas por 100 funcionarios son las siguientes :

Número de hijos :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de funcionarios :	21	18	26	17	9	4	3	1	0	1

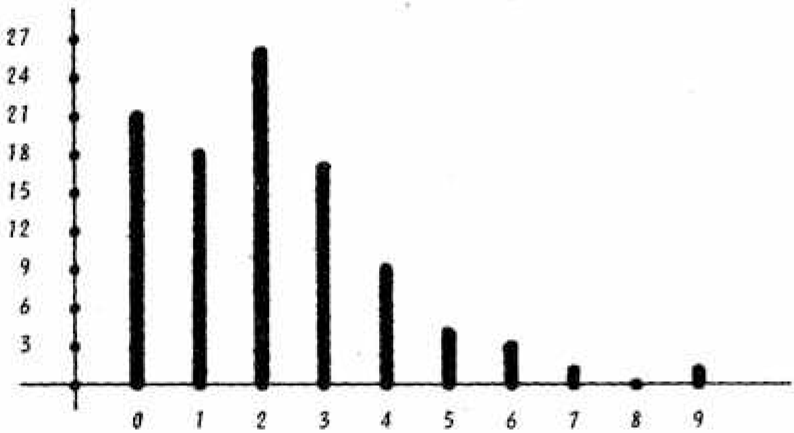
a) Representar la distribución mediante un diagrama de barras.

b) Hallar la media aritmética.

c) Hallar la varianza y la desviación típica. (JRV-VIII-8)

S O L U C I O N :

a) El diagrama en barras viene dado en la siguiente figura :



Consideremos ahora la siguiente tabla :

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
0	21	0	0	0
1	18	18	1	18
2	26	52	4	104
3	17	51	9	153
4	9	36	16	144
5	4	20	25	100
6	3	18	36	108
7	1	7	49	49
8	0	0	64	0
9	1	9	81	81
	100	211		757

b) $\bar{x} = 211:100 = 2'11$; c) $S^2 = (757:100) - 2'11^2 = 3'12$; $s = 1'76$

8.11. Los números $x_1, x_2, \ldots x_n$ están en progresión aritmética y la razón de esta progresión es $d > 0$. Se pide :

a) La media aritmética de estos números en función del primer término y de la razón.

b) El valor más próximo a la media.

S O L U C I O N :

a) El término general de la progresión es : $x_n = x_1 + (n-1)d$

La suma de los términos de una progresión aritmética es :

$$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} . n$$

La media aritmética de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es, teniendo en cuenta las relaciones de los apartados a) y b) :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{S_n}{n} = \frac{x_1 + x_n}{2n} . n = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

$$= \frac{x_1 + x_1 + (n-1)d}{2} = x_1 + \frac{(n-1)d}{2}$$

b) Veamos ahora cuál es el valor más próximo a la media. Se trata, por tanto, de hacer $|x_i - \bar{x}|$ mínimo.

$$|x_i - \bar{x}| = |(x_1 + (i-1)d) - (x_1 + \frac{(n-1)d}{2})| = |(i - \frac{n}{2} - \frac{1}{2})d| = |i - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}|d$$

$$= |\frac{2i - n - 1}{2}| \, d \qquad [1]$$

Siendo $d > 0$, la expresión [1] será mínima cuando lo sea

$$|2i - n - 1| = |2i - (n + 1)|$$

y tratándose de números enteros esto será cierto cuando

$$|2i - (n + 1)| = 0 \quad \text{o} \quad |2i - (n + 1)| = 1$$

1°) $|2i - (n + 1)| = 0 \iff 2i - (n + 1) = 0$

$\iff 2i = n + 1$, de donde n es impar, $n = 2h+1$

$\iff 2i = 2h + 2$

$\iff i = h + 1$

y por tanto, i es término central de la progresión.

2°) $|2i - (n + 1)| = 1 \iff 2i - (n + 1) = 1 \quad \text{o} \quad 2i - (n + 1) = -1$

a) $2i - (n + 1) = 1 \iff 2i = n + 2$, de donde n es par, $n = 2h$

$\iff 2i = 2h + 2$

$\iff i = h + 1$

b) $2i - (n + 1) = -1 \iff 2i = n$, de donde n es par, $n = 2h$

$\iff 2i = 2h$

$\iff i = h$

y por tanto, $i = h$, $i = h + 1$ son los términos centrales de la progresión.

8.12. Hallar la velocidad media con que se ha recorrido el trayecto d_1+d_2 , si d_1 se recorrió con velocidad v_1 y
d_2 se recorrió con velocidad v_2.

(*SELECTIVIDAD* - 1976)

S O L U C I O N :

Recordemos que la fórmula de la media aritmética es :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, x_i f_i}{\Sigma\, f_i}$$

Si hacemos : $x_i = v_i$ = velocidades en los distintos trayectos
$f_i = t_i$ = tiempo tardado en cada trayecto

entonces la fórmula se transforma en :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, v_i t_i}{\Sigma\, t_i} = v_m \qquad (v_m = \text{velocidad media})$$

y particularizando para nuestro caso , tenemos :

$$v_m = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

Poniendo $t_1 = d_1/v_1$, $t_2 = d_2/v_2$ y sustituyendo , resulta :

$$v_m = \frac{v_1 \dfrac{d_1}{v_1} + v_2 \dfrac{d_2}{v_2}}{\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2}} = \frac{d_1 + d_2}{\dfrac{d_1}{v_1} + \dfrac{d_2}{v_2}} = \frac{d_1 + d_2}{\dfrac{d_1 v_1 + d_2 v_1}{v_1 \cdot v_2}}$$

$$= \frac{d_1 + d_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1} \cdot v_1 \cdot v_2$$

---oooOooo---

8.13. Hallar la velocidad media con que se ha recorrido un trayecto de 20 km si los 10 primeros se han recorrido a 60 km/h y los 10 km últimos se han recorrido a 80 km/h.

S O L U C I O N :

Teniendo en cuenta la fórmula que da la velocidad media para dos trayectos (véase ejercicio anterior) , se tiene :

$$v_m = \frac{10 + 10}{10.80 + 10.60} \cdot 60 \cdot 80 \text{ km/h}$$

$$= 68'56 \text{ km/h}$$

---oooOooo---

8.14. Representaciones gráficas en una distribución estadística.

Aplicación a una distribución de frecuencia del número de letras de las 10 primeras palabras del presente enunciado.

(SELECTIVIDAD -1976)

SOLUCION :

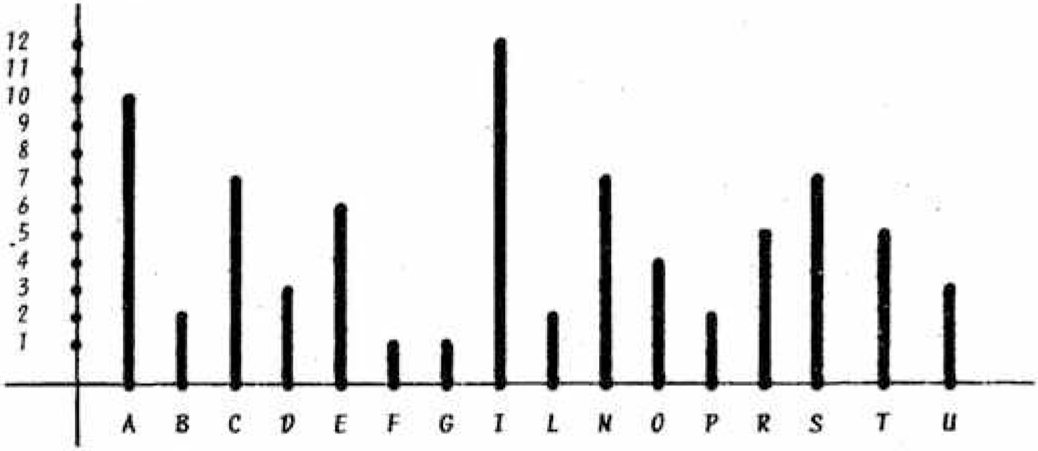
Consideremos las 10 primeras palabras del enunciado :

"REPRESENTACIONES GRAFICAS EN UNA DISTRIBUCION ESTADISTICA, APLICACION A LA DISTRIBUCION"

Representamos en una tabla la distribución de las letras :

x	f_i	x	f_i	x	f_i
a	10	g	1	r	5
b	2	i	12	s	7
c	7	l	2	t	5
d	3	n	7	u	3
e	6	o	4		
f	1	p	2		

En total hay 16 letras distintas. Podemos representar esta distribución mediante el diagrama de barras siguiente.



NOTA : *Si unimos los valores de los puntos* $(a,10)$, $(b,2),\ldots,(u,3)$ *con segmentos obtenemos una* ***poligonal*** , *y el diagrama recibe el nombre de* ***"diagrama poligonal"*** *o* ***"polígono de frecuencias"***.

---oooOooo---

8.15. Calcular la media aritmética y la desviación típica de los n primeros números naturales, sabiendo que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es $\frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1)$.

(*SELECTIVIDAD* -1975)

SOLUCION:

a) Calculemos primero la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{1+n}{2}$$

b) Consideremos ahora el siguiente cuadro :

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	$1 - \frac{1+n}{2}$	$(1-\frac{1+n}{2})^2 = 1 + (\frac{1+n}{2})^2 - 2\,\frac{1+n}{2}$
2	$2 - \frac{1+n}{2}$	$(2-\frac{1+n}{2})^2 = 4 + (\frac{1+n}{2})^2 - 4\,\frac{1+n}{2}$
3	$3 - \frac{1+n}{2}$	$(3-\frac{1+n}{2})^2 = 9 + (\frac{1+n}{2})^2 - 6\,\frac{1+n}{2}$
.	...	... ...
n	$n - \frac{1+n}{2}$	$(n-\frac{1+n}{2})^2 = n^2 + (\frac{1+n}{2})^2 - 2n\,\frac{1+n}{2}$

Teniendo en cuenta los valores de la última columna se tiene :

$$s^2 = \frac{1}{n}\left(1 + 4 + \dots + n^2 + n\left(\frac{1+n}{2}\right)^2 - \frac{1+n}{2}(2+4+6+\dots+2n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\left(\frac{1+n}{2}\right)^2 - \frac{1+n}{2}(1+n)n\right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(1+n)^2}{4} - \frac{(1+n)^2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(1+n)^2}{4} \quad [1] \text{ , (Nótese que } \frac{(1+n)^2}{4} = \bar{x}^2\text{)}$$

$$= \frac{(1+n)(4n+2-3n-3)}{12}$$

$$= \frac{(1+n)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

NOTA: *Al mismo resultado se llega teniendo en cuenta que :*

$$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - 2\bar{x}.\frac{1}{n}\Sigma x_i - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$$

y por tanto, se podría haber escrito directamente $s^2 = [1]$

8.16. Hallar la expresión de la media aritmética y de la varianza de una variable $y = ax + b$, cuando se sabe que la media de x es $\bar{x}$ y su varianza es s^2.
Estudiar el caso particular $y = \frac{x - \bar{x}}{s}$

(*SELECTIVIDAD*-1975)

S O L U C I O N :

a) $\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$, por definición de media aritmética

$= \frac{\Sigma(ax_i + b)}{n}$, sustituyendo y_i po su valor $ax_i + b$

$= \frac{a\,\Sigma x_i + nb}{n}$

$= a\bar{x} + b$, puesto que $\Sigma x_i/n = \bar{x}$

b) $s_y^2 = \frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n}$, por la definición de media

$= \frac{\Sigma(ax_i + b - (a\bar{x} + b))^2}{n}$, sustituyendo y_i e $\bar{y}$ por su valor

$= \frac{\Sigma(ax_i - a\bar{x})^2}{n}$, haciendo operaciones,

$= \frac{a^2\,\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n}$, sacando fuera a ,

$= a^2\, s_x^2$, puesto que $\Sigma (x_i - \bar{x})^2/n = s_x^2$

CASO PARTICULAR : $y = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1}{s}\,\bar{x} - \frac{\bar{x}}{s}$, luego , $a = \frac{1}{s}$ y $b = -\frac{\bar{x}}{s}$

Por tanto , $\bar{y} = a\bar{x} + b = \frac{1}{s}\,\bar{x} - \frac{\bar{x}}{s} = 0$

$$s^2 = a^2\, s^2 = \left(\frac{1}{s}\right)^2 s^2 = \frac{1}{s^2}\cdot s^2 = 1$$

---oooOooo---

OTRAS PUBLICACIONES DE LOS AUTORES

MATEMATICAS COMUNES DE C.O.U. por J.R.Vizmanos

INDICE: ***1.-Conjuntos:*** 1-1 Introducción. 1.2 Relación de pertenencia 1.3 Distintas formas de representar un conjunto. 1.4 Relación de inclusión. 1.5 Propiedades de la relación de inclusión. 1.6 Identidad de conjuntos. 1.8 Diagramas de conjuntos. 1-9 Operaciones con conjuntos. 1.10 Algebra de partes de un conjunto. EJERCICIOS.
2.-Proposiciones: 2.1 Proposición. 2.2 Valor lógico de una proposición. 2.3 Operaciones con proposiciones. 2.4 Implicación lógica. 2.5 Equivalencia lógica. 2.6 Tablas de verdad. 2.7 Algebra de proposiciones. EJERCICIOS.
3.-Circuitos lógicos: 3.1 Sistemas de númeración. 3.2 Sistema binario. 3.3 Algebra binaria. 3.4 Circuitos lógicos. 3.5 Combinaciones con circuitos. 3.6 Circuitos equivalentes. 3.7 Tablas de respuesta. 3.8 Algebra de Boole. EJERCICIOS.
4.-Aplicaciones: 4.1 Producto de conjuntos. 4.2 Representación del producto de conjuntos. 4.3 Propiedades del producto de conjuntos. - 4.4 Correspondencias. 4.5 Aplicaciones. 4.6 Clases de aplicaciones. 4.7 Composición de aplicaciones. 4.8 Representaciones gráficas. 4.9 Noción de grafo. EJERCICIOS.
5.- Variaciones, permutaciones y combinaciones: 5.1 Variaciones sin repetición. 5.2 Factoriales. 5.3 Permutaciones sin repetición. 5.4 Números combinatorios .Propiedades. 5.6 Variaciones con repetición. 5.7 Permutaciones con repetición. EJERCICIOS.
6.-Algebra de sucesos: 6.1 Experimento aleatorio. 6.2 Sucesos. 6.3 Operaciones con sucesos. 6.4 Algebra de Boole de los sucesos aleatorios. EJERCICIOS.
7.-Probabilidades y frecuencias: 7.1 Frecuencias absolutas y relativas. 7.2 Propiedades de las frecuencias. 7.3 Definición clásica de probabilidad. 7.4 Definición axiomática de probabilidad. 7.5 Probabilidad condicionada. 7.6 Probabilidades totales y compuestas. 7.7 Sucesos dependientes e independientes. EJERCICIOS.
8.-Estadística descriptiva: 8.1 Muestra y población. 8.2 Inferencia estadística. 8.3 Caracteres estadísticos. 8.4 Variables estadísticas discretas. 8.5 Variables estadísticas contínuas. 8.6 Distribuciones estadísticas de un carácter. 8.7 Representaciones gráficas. 8.8 Tratamiento de la información. 8.9 Medidas de centralización. 8.10 Medidas de dispersión. EJERCICIOS.

✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱

PROBLEMAS DE ALGEBRA Tomo.I por M. Anzola y J. Caruncho

INDICE: ***Teoría de conjuntos:*** 1. Conjuntos - Algebra de clases. 2.Correspondencias - Aplicaciones. 3.Relaciones de equivalecia. 4.Conjuntos ordenados. 5.Algebra de Boole. 6.Cardinales. 7.Combinatoria.
Teoría de grupos: 1.Operaciones. 2.Estructura de grupo. 3.Grupos cíclicos. 4.Grupos finitos. 5.Grupos abelianos. 6.Grupos libres.
Anillos y cuerpos: 1.La estructura de anillo. 2.Ideales. 3.Cuerpos.
Polinomios.

✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱ ✱

PROBLEMAS DE ALGEBRA LINEAL Tomo II por M.Anzola y J.Caruncho

INDICE: 1.Módulos: estructura. 2.Anillos y módulos noetherianos. 3. Espacio vectorial: estructura. 4.Matrices. 5.Matrices y endomorfismos. 6.Determinantes - aplicaciones multilineales. 7.Sistemas de ecuaciones . 8.Valores y vectores propios.

* * * * * * * * *

CURSO Y EJERCICIOS DE BIOESTADISTICA por J.R.Vizmanos y R.Asensio

INDICE: ***Estadística descriptiva:*** 1.Generalidades. 2.Distribuciones estadísticas de un carácter. 3.Medidas de centralización. 4.Medidas de dispersión. 5.Medidas de forma. PROBLEMAS RESUELTOS.
Probabilidades: 1.Algebra de sucesos. 2.Frecuencia y probabilidad. 3.Probabilidad condicionada. PROBLEMAS RESUELTOS.
Distribuciones discretas: 1.Generalidades. 2.Distribución binomial 3.Distribución hipergeométrica. 4.Distribución de Poisson. PROBLEMAS RESUELTOS.
Distribuciones continuas: 1.Generalidades. 2.Distribución normal. 3. Distribución χ^2 de Pearson. 4.Distribución t de Student. 5.Distribución F de Fisher-Snedecor. PROBLEMAS RESUELTOS.
Regresión y correlación: 1.Generalidades. 2.Regresión. 3.Correlación. PROBLEMAS RESUELTOS.
Estimación de parámetros: 1.Introducción. 2.Definiciones. 3.Estimadores por punto mas usuales. 4.Distribución en el muestreo de estos estimadores. 5.Distribuciones asociadas al estudio de dos poblaciones normales e independientes. 6.Construcción de intervalos de confianza. PROBLEMAS RESUELTOS.
Contraste de hipótesis: 1.Introducción. 2.Definiciones. 3.Fórmulas para los contrastes. 4.Analogias entre contrastes de hipótesis e intervalos de confianza. PROBLEMAS RESUELTOS.
Aplicaciones de la χ^2 : 1.Introducción. 2.Conformidad de una distribucion experimental y una teórica. 3.Relación de dependencia o independencia entre caracteres cualitativos. 4.Contraste de homogeneidad de varias muestras. PROBLEMAS RESUELTOS.
Análisis de la varianza: 1.Introducción. 2.Análisis de la varianza con un factor de variación. 3.Análisis de la varianza con dos factores independientes de variación. PROBLEMAS RESUELTOS.
Series cronológicas: 1.Concepto. 2.Análisis de una serie cronológica. 3.Métodos de estudio de la tendencia secular. 4. Estudio de las variaciones estacionales. 5.Desestacionalización. 6.Estudio de las fluctuaciones cíclicas. 7 Estudio de las variaciones accidentales. 8. Predicción. PROBLEMA RESUELTO.
Bibliografía.
Apéndice: Tabla I: Distribución binomial. Tabla II: Distribución de Poisson. Tabla III: Distribución normal. Tabla IV: Distribución χ^2 de Pearson. Tabla V: Distribución t de Student. VI: Distribución F de Fisher-Snedecor.

* * * * * * * * *